Công thức tổng quát của dãy truy hồi tuyến tính thuần nhất

Định lý 1. Cho số nguyên $k \geq 1$ và các số phức $c_1, \ldots, c_k$ với $c_k \neq 0$. Xét hệ thức truy hồi

$$a_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} c_j a_{n+k-j} \qquad (n \geq 0). \tag{1}$$

Giả sử đa thức đặc trưng có phân tích

$$P(x) = x^k - \sum_{j=1}^{k} c_j x^{k-j} = \prod_{i=1}^{s} (x - \lambda_i)^{m_i},$$

trong đó $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ đôi một phân biệt và m_i là bội của λ_i. Khi đó $\sum_{i=1}^{s} m_i = k$ và mọi λ_i đều khác 0 vì $P(0) = -c_k \neq 0$. Quy ước $\deg 0 = -\infty$.

(a) Với mỗi dãy số phức $(a_n)_{n\geq 0}$ thỏa mãn (1), tồn tại duy nhất các đa thức $Q_1, \ldots, Q_s \in \mathbb{C}[x]$, với $\deg Q_i < m_i$, sao cho

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} Q_i(n) \lambda_i^n \qquad (n \geq 0). \tag{2}$$

(b) Ngược lại, với mọi bộ đa thức $Q_1, \ldots, Q_s$ như trên, dãy xác định bởi (2) thỏa mãn (1).

Không gian các dãy nghiệm trên $\mathbb{C}$ có số chiều k và có cơ sở gồm các dãy

$$(n^j \lambda_i^n)_{n\geq 0} \qquad (1 \leq i \leq s,\ 0 \leq j < m_i), \tag{3}$$

với quy ước $n^0 = 1$ cả khi $n = 0$. Do đó k số hạng đầu $a_0, \ldots, a_{k-1}$ xác định duy nhất k hệ số của các đa thức Q_i.

Chứng minh. Trên không gian các dãy số phức, gọi E là toán tử dịch, xác định bởi $(Eu)_n = u_{n+1}$, và I là toán tử đồng nhất. Hệ thức (1) tương đương với $P(E)a = 0$. Các toán tử $E - \lambda_i I$ đôi một giao hoán vì đều là đa thức theo E.

Bước 1. Xây dựng các dãy nghiệm. Cho $u_n = \lambda^n Q(n)$ với $\lambda \neq 0$ và $Q \in \mathbb{C}[x]$. Đặt $\Delta[Q](x) = Q(x+1) - Q(x)$. Với mọi $\mu \in \mathbb{C}$, ta có

$$\big((E - \mu I)u\big)_n = u_{n+1} - \mu u_n = \lambda^n \big((\lambda - \mu)Q(n) + \lambda \Delta[Q](n)\big). \tag{4}$$

Khi $\mu = \lambda$, phần đa thức trở thành $\lambda\Delta[Q]$. Nếu Q có bậc $d \geq 1$ với hệ số cao nhất c, khai triển $(x+1)^d - x^d$ cho thấy $\Delta[Q]$ có bậc $d-1$ với hệ số cao nhất dc. Nếu Q là hằng thì $\Delta[Q] = 0$. Vì thế, nếu $\lambda = \lambda_i$ và $\deg Q < m_i$ thì $(E - \lambda_i I)^{m_i} u = 0$. Do $(x - \lambda_i)^{m_i} \mid P(x)$, ta có $P(E)u = 0$. Tính tuyến tính cho ta phần (b).

Bước 2. Chứng minh tính độc lập tuyến tính. Giả sử $\sum_{h=1}^{s} Q_h(n)\lambda_h^n = 0$ với mọi $n \geq 0$, trong đó $\deg Q_h < m_h$. Nếu $Q_i \neq 0$ với một chỉ số i, ta áp dụng toán tử $D_i = \prod_{h\neq i} (E - \lambda_h I)^{m_h}$ vào hai vế của đẳng thức giữa các dãy (tích rỗng được hiểu là I). Theo Bước 1, D_i triệt tiêu mọi số hạng có chỉ số $h \neq i$.

Xét số hạng còn lại $Q_i(n)\lambda_i^n$. Theo (4), mỗi lần áp dụng $E - \lambda_h I$ với $h \neq i$, phần đa thức giữ nguyên bậc vì hệ số cao nhất được nhân với $\lambda_i - \lambda_h \neq 0$. Do đó $\lambda_i^n R(n) = 0$ với mọi $n \geq 0$, trong đó R là một đa thức khác 0. Điều này vô lý vì $\lambda_i \neq 0$ và R chỉ có hữu hạn nghiệm. Vậy mọi Q_h đều bằng 0, chứng tỏ các dãy trong (3) độc lập tuyến tính.

Bước 3. Xác định số chiều của không gian nghiệm. Ánh xạ $a \mapsto (a_0, \ldots, a_{k-1})$ là một đẳng cấu tuyến tính từ không gian nghiệm lên $\mathbb{C}^k$, vì với mỗi bộ k số hạng đầu, (1) lần lượt xác định duy nhất các số hạng còn lại. Do đó k dãy độc lập tuyến tính trong (3) lập thành một cơ sở. Nhóm các số hạng ứng với cùng một λ_i trong khai triển theo cơ sở ấy, ta được biểu diễn duy nhất (2). □

https://nttuan.org/
Nguyễn Trung Tuân, 0915011235

Nhận xét 1 (Khi 0 là nghiệm của đa thức đặc trưng)**.** Nếu $c_k = 0$, viết $P(x) = x^r H(x)$ với $r \geq 1$ và $H(0) \neq 0$. Đặt $b_t = a_{t+r}$ với $t \geq 0$. Vì $b = E^r a$, ta có

$$P(E)a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad H(E)b = 0.$$

Do đó $a_0, \ldots, a_{r-1}$ được chọn tùy ý. Nếu $r = k$ thì $H = 1$, nên $a_n = 0$ với mọi $n \geq k$.

Nếu $r < k$, gọi $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ là các nghiệm phân biệt của H, có bội tương ứng $m_1, \ldots, m_s$. Áp dụng Định lý 1 cho b với đa thức đặc trưng H, ta được $b_t = \sum_{i=1}^{s} S_i(t)\lambda_i^t$, trong đó $\deg S_i < m_i$. Thay $t = n - r$ và đặt $Q_i(x) = \lambda_i^{-r} S_i(x - r)$, ta có

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} Q_i(n)\lambda_i^n \qquad (n \geq r).$$

Nhận xét 2 (Dạng thực của công thức tổng quát)**.** Giả sử $c_k \neq 0$ và các hệ số $c_1, \ldots, c_k$ cùng các số hạng đầu $a_0, \ldots, a_{k-1}$ đều thực. Khi đó mọi a_n đều thực. Gọi Q_λ là đa thức ứng với nghiệm λ trong (2), và $\overline{Q}$ là đa thức thu được bằng cách lấy liên hợp phức từng hệ số của Q.

Vì P có hệ số thực, $\overline{\lambda}$ và λ có cùng bội. Lấy liên hợp phức hai vế của (2) rồi đổi chỉ số $\lambda \leftrightarrow \overline{\lambda}$, ta được

$$a_n = \overline{a_n} = \sum_{\lambda:\, P(\lambda)=0} \overline{Q_{\overline{\lambda}}}(n)\lambda^n.$$

Tính duy nhất của biểu diễn cho $Q_{\overline{\lambda}} = \overline{Q_\lambda}$. Đặc biệt, nếu λ thực thì Q_λ có hệ số thực.

Với một cặp nghiệm không thực liên hợp có bội m, chọn $\lambda = \rho e^{\mathrm{i}\varphi}$ với $\rho > 0$ và $0 < \varphi < \pi$. Viết $Q_\lambda = A + \mathrm{i}B$ với $A, B \in \mathbb{R}[x]$ có bậc nhỏ hơn m. Hai số hạng ứng với cặp nghiệm này có tổng bằng

$$\begin{aligned} Q_\lambda(n)\lambda^n + Q_{\overline{\lambda}}(n)\overline{\lambda}^n &= 2\,\mathrm{Re}\big(Q_\lambda(n)\lambda^n\big) \\ &= \rho^n\big(U(n)\cos(n\varphi) + V(n)\sin(n\varphi)\big), \end{aligned}$$

trong đó $U = 2A$ và $V = -2B$. Ghép từng cặp nghiệm liên hợp như trên, ta được một biểu diễn của a_n hoàn toàn trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1 (Một dãy thực có hệ số phức trong công thức tổng quát)**.** Dãy $a_n = \sin(n\pi/2)$ thỏa mãn $a_{n+2} = -a_n$, với $a_0 = 0$ và $a_1 = 1$. Đa thức đặc trưng $x^2 + 1$ có hai nghiệm đơn i và $-\mathrm{i}$. Viết $a_n = A\mathrm{i}^n + B(-\mathrm{i})^n$. Hai số hạng đầu cho $A + B = 0$ và $\mathrm{i}(A - B) = 1$, nên $A = -\mathrm{i}/2$, $B = \mathrm{i}/2$. Do đó

$$a_n = \frac{\mathrm{i}^n - (-\mathrm{i})^n}{2\mathrm{i}}.$$

https://nttuan.org/
Nguyễn Trung Tuân, 0915011235