Bài 4. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AD \parallel BC$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Điểm F nằm trong tam giác BCE sao cho các bộ bốn điểm A, B, E, F và C, D, E, F đều đồng viên. Đường thẳng qua A, song song với BD, cắt đường thẳng EF tại G. Biết rằng

$$AE^2 = EF \cdot EG.$$

Tìm tất cả các giá trị có thể có của $\dfrac{AD}{BC}$.

Bài 5. Cho số nguyên $d \geq 2$ và số nguyên không âm M. Xét một tập hữu hạn khác rỗng $S \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$. Với mỗi $i = 1, \ldots, d$, gọi

$$a_i = \frac{1}{|S|} \sum_{(x_1,\ldots,x_d) \in S} x_i$$

là trung bình cộng của các tọa độ thứ i của những bộ thuộc S. Biết rằng

$$a_i \leq M \quad (1 \leq i \leq d-1), \qquad a_d \leq 3M + 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $|S|$.

Bài 6. Cho các số nguyên dương m, n thỏa mãn $1 \leq m < n$. Gọi $F(m, n)$ là số thực nhỏ nhất C có tính chất sau: với mọi bộ số thực $x_1, \ldots, x_n$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1,$$

luôn chọn được m chỉ số $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$ sao cho

$$0 \leq x_{i_1} + \cdots + x_{i_m} \leq C.$$

a) Tính $F(20, 26)$.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n đủ lớn,

$$\min_{1 \leq m \leq n-1} F(m, n) < 0{,}85.$$

https://nttuan.org/
T's Lab
Nguyễn Trung Tuân, 0915011235