Chinese Mathematical Olympiad 2027, Day 1

Bài 1. Một dãy số nguyên dương $(a_n)_{n\geq 1}$ được gọi là *dãy tốt* nếu với mọi số nguyên dương n,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1, & a_n \geq 2, \\ n, & a_n = 1. \end{cases}$$

Cho một dãy tốt và hai số nguyên $m, t \geq 2$ thỏa mãn

$$a_1 = m = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} a_i.$$

a) Chứng minh rằng $t \geq \dfrac{5}{2}m$.

b) Tìm số thực nhỏ nhất C sao cho $t \leq Cm$ với mọi dãy tốt và mọi cặp (m, t) thỏa mãn các điều kiện trên.

Bài 2. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương N sao cho với mọi số nguyên $n \geq N$, tồn tại một số nguyên dương a nguyên tố cùng nhau với $n! + 1$ và không số nào trong các số $a - 1$, $a^2 - 1$, …, $a^{n^2} - 1$ chia hết cho $n! + 1$.

Bài 3. Cho hai số nguyên dương $a > b$ nguyên tố cùng nhau và khác tính chẵn lẻ. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, một con cừu ban đầu đứng tại gốc tọa độ $O = (0, 0)$. Mỗi bước nhảy thuộc một trong hai loại sau:

- Loại A: cộng vào tọa độ hiện tại một trong bốn vectơ (a, b), $(-b, a)$, $(-a, -b)$, $(b, -a)$.
- Loại B: cộng vào tọa độ hiện tại một trong bốn vectơ (b, a), $(-a, b)$, $(-b, -a)$, $(a, -b)$.

a) Chứng minh rằng tồn tại một điểm nguyên P mà con cừu không thể đi từ O đến P bằng một dãy bước nhảy có số bước loại A không vượt quá

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - 100,$$

bất kể số bước loại B là bao nhiêu.

b) Chứng minh rằng tồn tại một điểm nguyên Q thỏa mãn $OQ \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ mà con cừu không thể đi từ O đến Q bằng một dãy bước nhảy có tổng số bước không vượt quá

$$\frac{\sqrt{2}\,a(a+b)}{\sqrt{a^2 + 2ab - b^2}} - 100.$$

https://nttuan.org/
Nguyễn Trung Tuân, 0915011235
T's Lab