

Một chứng minh của công thức Stirling

Định lý 1 (Công thức Stirling). Khi $n \rightarrow \infty$, ta có

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

nghĩa là

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} = 1.$$

Chính xác hơn, với mọi số nguyên dương n ,

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{r_n}, \quad 0 < r_n < \frac{1}{12n}.$$

Để chứng minh định lý, ta cần hai bổ đề sau.

Bổ đề 1. Dãy số

$$u_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n, \quad n \geq 1,$$

hội tụ tới một số thực ℓ . Hơn nữa,

$$0 < u_n - \ell < \frac{1}{12n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Chứng minh. Ta có

$$u_n - u_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

Đặt $x = \frac{1}{2n+1}$. Khi đó

$$n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2x}, \quad 1 + \frac{1}{n} = \frac{1+x}{1-x},$$

nên

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1 \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t^2} - 1 \right) dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt. \end{aligned}$$

Vì $0 < x < 1$, suy ra

$$0 < u_n - u_{n+1} < \frac{1}{x(1-x^2)} \int_0^x t^2 dt = \frac{x^2}{3(1-x^2)} = \frac{1}{12n(n+1)}.$$

Do đó (u_n) giảm. Mặt khác, vì $u_1 = 1$ nên

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) \\ &\geq 1 - \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{11}{12} + \frac{1}{12n}. \end{aligned}$$

Vậy (u_n) giảm và bị chặn dưới, nên hội tụ tới một số thực ℓ . Cuối cùng,

$$0 < u_n - \ell = \sum_{k=n}^{\infty} (u_k - u_{k+1}) < \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{12n}.$$

□

Bổ đề 2 (Ước lượng Wallis). Với mọi số nguyên dương n , ta có

$$\sqrt{\pi n} < \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} < \sqrt{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)}.$$

Đặc biệt,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!} = \sqrt{\pi}.$$

Chứng minh. Đặt

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m t \, dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Ta có $I_0 = \pi/2$ và $I_1 = 1$. Với $m \geq 2$, tích phân từng phần cho

$$\begin{aligned} I_m &= [-\sin^{m-1} t \cos t]_0^{\pi/2} + (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} t \cos^2 t \, dt \\ &= (m-1)(I_{m-2} - I_m). \end{aligned}$$

Suy ra

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

Đặt

$$b_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

Áp dụng liên tiếp công thức truy hồi trên, ta được

$$I_{2n-1} = \frac{b_n}{2n}, \quad I_{2n} = \frac{\pi}{2b_n}, \quad I_{2n+1} = \frac{b_n}{2n+1}.$$

Mặt khác, vì $0 < \sin t < 1$ với mọi $t \in (0, \pi/2)$ nên

$$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}.$$

Do đó

$$\frac{b_n}{2n+1} < \frac{\pi}{2b_n} < \frac{b_n}{2n},$$

hay

$$\pi n < b_n^2 < \pi \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Đây chính là bất đẳng thức cần chứng minh. Chia các vế cho n rồi áp dụng định lý kẹp, ta thu được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

□

Chứng minh công thức Stirling. Xét dãy (u_n) và giới hạn ℓ trong Bổ đề 1. Từ định nghĩa của u_n , ta có

$$e^{2u_n - u_{2n}} = \sqrt{2} \frac{4^n (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!}.$$

Cho $n \rightarrow \infty$ và áp dụng Bổ đề 2, ta được

$$e^\ell = \sqrt{2\pi}, \quad \text{hay} \quad \ell = \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

Đặt $r_n = u_n - \ell$. Theo Bổ đề 1,

$$0 < r_n < \frac{1}{12n}.$$

Bởi vậy,

$$\ln(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + r_n.$$

Lấy hàm mũ hai vế, ta thu được

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{r_n}.$$

Vì $r_n \rightarrow 0$, suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{r_n} = 1.$$

Định lý được chứng minh. □

T's Lab