

Một chứng minh của các đẳng thức Newton

Định lý 1 (Đẳng thức Newton). Cho số nguyên dương n và các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$. Đặt

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_m = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} \quad (1 \leq m \leq n),$$

và

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \quad (k \geq 1).$$

Khi đó:

(i) Với $1 \leq j \leq n$, ta có

$$\sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \sigma_k s_{j-k} + (-1)^j j \sigma_j = 0.$$

(ii) Với $j > n$, ta có

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_k s_{j-k} = 0.$$

Chứng minh. (i) Xét $1 \leq j \leq n$. Với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ký hiệu $\sigma_k^{(i)}$ là đa thức đối xứng sơ cấp thứ k của các biến

$$x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n,$$

và quy ước $\sigma_0^{(i)} = 1$.

Chia các đơn thức trong σ_k thành hai nhóm, tùy theo có chứa x_i hay không, ta được

$$\sigma_k = \sigma_k^{(i)} + x_i \sigma_{k-1}^{(i)} \quad (1 \leq k \leq n-1).$$

Bởi vậy, áp dụng liên tiếp hệ thức $\sigma_k^{(i)} = \sigma_k - x_i \sigma_{k-1}^{(i)}$, ta có

$$\sigma_{j-1}^{(i)} = \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r x_i^r \sigma_{j-1-r}.$$

Nhân hai vế với x_i rồi lấy tổng theo i , suy ra

$$\sum_{i=1}^n x_i \sigma_{j-1}^{(i)} = \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r \sigma_{j-1-r} s_{r+1}.$$

Mặt khác, mỗi đơn thức $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_j}$ trong σ_j xuất hiện đúng j lần ở tổng bên trái, tương ứng với $i = i_1, i_2, \dots, i_j$. Do đó

$$j \sigma_j = \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r \sigma_{j-1-r} s_{r+1}.$$

Đổi chỉ số $k = j - 1 - r$ và nhân hai vế với $(-1)^{j-1}$, ta thu được

$$\sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \sigma_k s_{j-k} + (-1)^j j \sigma_j = 0.$$

(ii) Xét $j > n$. Xét đa thức

$$P(t) = \prod_{i=1}^n (t - x_i) = t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n.$$

Vì $P(x_i) = 0$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ nên

$$x_i^n - \sigma_1 x_i^{n-1} + \sigma_2 x_i^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n = 0.$$

Nhân đẳng thức này với x_i^{j-n} rồi lấy tổng theo i , ta được

$$s_j - \sigma_1 s_{j-1} + \sigma_2 s_{j-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n s_{j-n} = 0,$$

chính là đẳng thức cần chứng minh. □