

Một chứng minh của bất đẳng thức Maclaurin

Định lý 1 (Bất đẳng thức Maclaurin). Cho số nguyên $n \geq 2$ và các số thực không âm $x_1, \dots, x_n$. Với mỗi $k \in \{1, \dots, n\}$, đặt

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}, \quad E_k = \frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}}.$$

Khi đó

$$E_1 \geq E_2^{1/2} \geq E_3^{1/3} \geq \dots \geq E_n^{1/n}.$$

Với mỗi $k \in \{1, \dots, n-1\}$, dấu bằng trong bất đẳng thức

$$E_k^{1/k} \geq E_{k+1}^{1/(k+1)}$$

xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = \dots = x_n$ hoặc có nhiều nhất $k-1$ biến dương.

Chứng minh. Ta chứng minh đồng thời chuỗi bất đẳng thức và điều kiện xảy ra dấu bằng bằng quy nạp theo n .

Với $n=2$, khẳng định được suy ra từ đẳng thức

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - x_1 x_2 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{4} \geq 0.$$

Giả sử khẳng định đúng với $n-1$ biến, trong đó $n \geq 3$. Xét các số thực không âm $x_1, \dots, x_n$ và đa thức

$$P(t) = \prod_{i=1}^n (t - x_i) = t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \leq \dots \leq x_n$. Theo định lý Rolle, kết hợp với tính chất một nghiệm bội $r \geq 2$ của P là nghiệm bội $r-1$ của P' , đa thức P' có $n-1$ nghiệm thực $y_1, \dots, y_{n-1}$, tính cả bội, thỏa mãn

$$x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq y_{n-1} \leq x_n.$$

Đặc biệt, $y_1, \dots, y_{n-1}$ đều không âm và

$$\frac{P'(t)}{n} = \prod_{j=1}^{n-1} (t - y_j).$$

Với $1 \leq k \leq n-1$, đặt

$$\tau_k = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n-1} y_{j_1} \cdots y_{j_k}.$$

So sánh các hệ số theo hệ thức Viète, ta được

$$\tau_k = \frac{n-k}{n} \sigma_k.$$

Do đó

$$\frac{\tau_k}{\binom{n-1}{k}} = \frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}} = E_k \quad (1 \leq k \leq n-1).$$

Áp dụng giả thiết quy nạp cho $y_1, \dots, y_{n-1}$, suy ra

$$E_1 \geq E_2^{1/2} \geq \dots \geq E_{n-1}^{1/(n-1)}. \quad (1)$$

Ta còn phải chứng minh

$$E_{n-1}^{1/(n-1)} \geq E_n^{1/n}.$$

Nếu $E_n = 0$ thì bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Sau đây giả sử $E_n > 0$, tức là $x_1, \dots, x_n$ đều dương.

Chuỗi (1) vừa được chứng minh cho mọi bộ n số không âm. Áp dụng bất đẳng thức đầu tiên của chuỗi này cho các số

$$\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n},$$

ta được

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^2 \geq \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{x_i x_j}.$$

Mặt khác,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \frac{E_{n-1}}{E_n}, \quad \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{x_i x_j} = \frac{E_{n-2}}{E_n}.$$

Bởi vậy

$$E_{n-1}^2 \geq E_{n-2} E_n.$$

Kết hợp với bất đẳng thức cuối cùng trong (1), suy ra

$$E_{n-1}^2 \geq E_{n-2} E_n \geq E_{n-1}^{(n-2)/(n-1)} E_n. \quad (2)$$

Chia hai vế cho $E_{n-1}^{(n-2)/(n-1)} > 0$, ta thu được

$$E_{n-1}^{n/(n-1)} \geq E_n,$$

hay

$$E_{n-1}^{1/(n-1)} \geq E_n^{1/n}.$$

Như vậy, toàn bộ chuỗi bất đẳng thức đã được chứng minh.

Ta xét điều kiện xảy ra dấu bằng. Cố định $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Nếu $x_1 = \dots = x_n$ thì hiển nhiên $E_k^{1/k} = E_{k+1}^{1/(k+1)}$. Nếu có nhiều nhất $k-1$ biến dương thì $E_k = E_{k+1} = 0$, nên dấu bằng cũng xảy ra.

Ngược lại, giả sử

$$E_k^{1/k} = E_{k+1}^{1/(k+1)}.$$

Nếu $E_k = 0$ thì, do các biến không âm, có nhiều nhất $k-1$ biến dương. Vì vậy, chỉ cần xét trường hợp $E_k > 0$.

Nếu $k \leq n-2$, đẳng thức trên tương đương với

$$\left(\frac{\tau_k}{\binom{n-1}{k}} \right)^{1/k} = \left(\frac{\tau_{k+1}}{\binom{n-1}{k+1}} \right)^{1/(k+1)}.$$

Vì $\tau_k > 0$, điều kiện dấu bằng trong giả thiết quy nạp cho thấy $y_1 = \dots = y_{n-1} = c$ với một số $c > 0$. Khi đó $E_1 = c$ và $E_2 = c^2$, nên $E_1^2 = E_2$. Từ đồng nhất thức

$$E_1^2 - E_2 = \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2,$$

suy ra $x_1 = \dots = x_n$.

Cuối cùng, nếu $k = n - 1$, thì $E_k > 0$ và đẳng thức đang xét kéo theo $E_n > 0$. Khi đó hai vế ngoài cùng trong (2) bằng nhau, nên

$$E_{n-2} = E_{n-1}^{(n-2)/(n-1)},$$

tức là

$$E_{n-2}^{1/(n-2)} = E_{n-1}^{1/(n-1)}.$$

Áp dụng trường hợp vừa xét, ta cũng được $x_1 = \dots = x_n$. Phép quy nạp hoàn tất. $\square$