

Một chứng minh của bất đẳng thức Karamata

Trong phần này, $I \subseteq \mathbb{R}$ là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng, có thể không bị chặn.

Định nghĩa 1 (Hàm lồi và hàm lõm). Hàm số $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là *hàm lồi* trên I nếu với mọi $u, v \in I$ và mọi $\lambda \in [0, 1]$, ta có

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v).$$

Về mặt hình học, phần đồ thị nằm giữa hai điểm bất kỳ của đồ thị không nằm phía trên đoạn thẳng nối hai điểm ấy. Hàm số f được gọi là *lồi nghiêm ngặt* nếu bất đẳng thức trên là nghiêm ngặt mỗi khi $u \neq v$ và $0 < \lambda < 1$. Hàm số f được gọi là *hàm lõm* nếu $-f$ là hàm lồi, tức là

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \geq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v).$$

Khái niệm *lõm nghiêm ngặt* được định nghĩa tương tự.

Chẳng hạn, $f(t) = t^2$ lồi nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$, bởi

$$\lambda u^2 + (1 - \lambda)v^2 - (\lambda u + (1 - \lambda)v)^2 = \lambda(1 - \lambda)(u - v)^2.$$

Hàm số $f(t) = |t|$ lồi nhưng không lồi nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$; hàm số $f(t) = -t^2$ lõm nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$. Nếu f có đạo hàm cấp hai thì ta có kết quả sau:

Định lý 1 (Tiêu chuẩn đạo hàm cho tính lồi nghiêm ngặt). Cho $I \subseteq \mathbb{R}$ là một khoảng mở và $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số có đạo hàm cấp hai trên I . Ba điều kiện sau tương đương:

- (1) f lồi nghiêm ngặt trên I .
- (2) f' đồng biến nghiêm ngặt trên I .
- (3) $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$ và f'' không đồng nhất bằng 0 trên bất kỳ khoảng con không suy biến nào của I . Nói cách khác,

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

và với mọi $a, b \in I$, $a < b$, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f''(c) > 0$.

Đặc biệt, điều kiện

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$$

là một điều kiện đủ để f lồi nghiêm ngặt trên I .

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (3). Vì f lồi nghiêm ngặt nên f lồi. Với mọi $u, v \in I$, $u < v$, và $0 < h < v - u$, tính lồi cho

$$\frac{f(u+h) - f(u)}{h} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(v) - f(v-h)}{h}.$$

Cho $h \rightarrow 0^+$, ta được

$$f'(u) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq f'(v).$$

Do đó f' không giảm trên I , suy ra

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I.$$

Giả sử tồn tại $a, b \in I$, $a < b$, sao cho $f''(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Theo định lý giá trị trung bình, f' là hàm hằng trên (a, b) , nên tồn tại các hằng số A, B sao cho

$$f(x) = Ax + B \quad \forall x \in (a, b).$$

Điều này mâu thuẫn với tính lồi nghiêm ngặt của f . Vậy điều kiện (3) được thỏa mãn.

(3) $\Rightarrow$ (2). Từ $f'' \geq 0$ và định lý giá trị trung bình áp dụng cho f' , suy ra f' không giảm trên I .

Giả sử có $u, v \in I$, $u < v$, sao cho $f'(u) = f'(v)$. Với mọi $x \in [u, v]$, ta có

$$f'(u) \leq f'(x) \leq f'(v).$$

Do đó f' là hàm hằng trên $[u, v]$, kéo theo

$$f''(x) = 0 \quad \forall x \in (u, v),$$

trái với điều kiện (3). Vậy $f'(u) < f'(v)$ với mọi $u < v$, nghĩa là f' đồng biến nghiêm ngặt trên I .

(2) $\Rightarrow$ (1). Lấy tùy ý $u, v \in I$, $u < v$, và $z \in (u, v)$. Theo định lý giá trị trung bình, tồn tại $\xi \in (u, z)$ và $\eta \in (z, v)$ sao cho

$$\frac{f(z) - f(u)}{z - u} = f'(\xi), \quad \frac{f(v) - f(z)}{v - z} = f'(\eta).$$

Vì $\xi < \eta$ và f' đồng biến nghiêm ngặt, ta có

$$\frac{f(z) - f(u)}{z - u} < \frac{f(v) - f(z)}{v - z}.$$

Sắp xếp lại, suy ra

$$f(z) < \frac{v - z}{v - u} f(u) + \frac{z - u}{v - u} f(v).$$

Đây chính là tính lồi nghiêm ngặt của f .

Cuối cùng, nếu $f''(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì điều kiện (3) hiển nhiên được thỏa mãn. $\square$

Nhận xét 1. Điều kiện $f'' > 0$ tại mọi điểm là điều kiện đủ, nhưng không phải điều kiện cần cho tính lồi nghiêm ngặt. Chẳng hạn, hàm số

$$f(x) = x^4, \quad x \in \mathbb{R},$$

có

$$f''(x) = 12x^2 \geq 0, \quad f''(0) = 0.$$

Tuy vậy, f'' không đồng nhất bằng 0 trên bất kỳ khoảng không suy biến nào, nên f vẫn lồi nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$. Cũng cần phân biệt điều kiện trong định lý với điều kiện yếu hơn “ $f'' \geq 0$ và f'' không đồng nhất bằng 0 trên toàn bộ I ”. Điều kiện yếu hơn này chưa đủ. Ví dụ, hàm số

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^4, & x > 0 \end{cases}$$

có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $g'' \geq 0$ và $g'' \neq 0$, nhưng không lồi nghiêm ngặt vì g là hàm hằng trên $(-\infty, 0)$.

Nhận xét 2. Trong định lý trên, không cần giả thiết f'' liên tục. Nếu xét hàm số trên đoạn $[a, b]$, các kết luận vẫn đúng khi f liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm cấp hai trên (a, b) ; các điều kiện về đạo hàm chỉ cần kiểm tra trên (a, b) . Thật vậy, nhờ tính liên tục tại hai đầu mút, định lý giá trị trung bình vẫn áp dụng được trong chứng minh trên.

Các tiêu chuẩn cho tính lõm nghiêm ngặt được suy ra bằng cách xét $-f$. Đặc biệt, $f'' < 0$ trên một khoảng là điều kiện đủ để f lõm nghiêm ngặt trên khoảng đó.

Định nghĩa 2 (Quan hệ trội). Cho hai bộ số thực

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

Ký hiệu

$$x_1^\downarrow \geq \dots \geq x_n^\downarrow, \quad y_1^\downarrow \geq \dots \geq y_n^\downarrow$$

là các bộ thu được bằng cách sắp xếp các thành phần của x, y theo thứ tự không tăng.

Ta nói x trội y , ký hiệu $x \succeq y$, nếu

$$\sum_{i=1}^k x_i^\downarrow \geq \sum_{i=1}^k y_i^\downarrow \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

và

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Như vậy, hai bộ phải có cùng tổng; đồng thời, tổng của k thành phần lớn nhất của x không nhỏ hơn tổng của k thành phần lớn nhất của y , với mọi $k < n$.

Ví dụ,

$$(4, 1, 1) \succeq (3, 2, 1),$$

vì $4 \geq 3$, $4 + 1 \geq 3 + 2$ và $4 + 1 + 1 = 3 + 2 + 1$.

Tuy nhiên, hai bộ có cùng tổng không nhất thiết so sánh được theo quan hệ trội. Chẳng hạn, $(4, 1, 1)$ và $(3, 3, 0)$ không bộ nào trội bộ nào, bởi $4 > 3$ nhưng $4 + 1 < 3 + 3$.

Bổ đề 1 (Làm đều hai số). Cho $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi và $a, b \in I$, $a \geq b$. Nếu $u, v \in [b, a]$ và $u + v = a + b$ thì

$$f(u) + f(v) \leq f(a) + f(b).$$

Nếu f lõm nghiêm ngặt thì dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(u, v) = (a, b)$ hoặc $(u, v) = (b, a)$.

Chứng minh. Nếu $a = b$ thì kết luận hiển nhiên. Giả sử $a > b$ và đặt

$$\lambda = \frac{u - b}{a - b} \in [0, 1].$$

Khi đó

$$u = \lambda a + (1 - \lambda)b, \quad v = (1 - \lambda)a + \lambda b.$$

Từ tính lồi của f , ta có

$$\begin{aligned} f(u) &\leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b), \\ f(v) &\leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b). \end{aligned}$$

Cộng hai bất đẳng thức, ta được điều phải chứng minh.

Nếu f lõm nghiêm ngặt thì cả hai bất đẳng thức trên đều nghiêm ngặt khi $0 < \lambda < 1$. Vì vậy, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\lambda \in \{0, 1\}$, tương đương với điều kiện đã nêu. $\square$

Định lý 2 (Bất đẳng thức Karamata). Cho $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi và hai bộ $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ có các thành phần thuộc I . Nếu $x \succeq y$ thì

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq \sum_{i=1}^n f(y_i).$$

Nếu f lồi nghiêm ngặt thì dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai bộ x, y trùng nhau sau một phép hoán vị; tương đương,

$$x_i^\downarrow = y_i^\downarrow \quad (1 \leq i \leq n).$$

Nếu f là hàm lồi thì chiều bất đẳng thức đảo lại. Nếu f lồi nghiêm ngặt thì điều kiện xảy ra dấu bằng vẫn như trên.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n , đồng thời xét điều kiện dấu bằng khi f lồi nghiêm ngặt.

Với $n = 1$, giả thiết cho $x_1 = y_1$, nên kết luận hiển nhiên.

Giả sử kết luận đúng với hai bộ gồm $n - 1$ số, trong đó $n \geq 2$. Do phép hoán vị không làm thay đổi các tổng cần so sánh, ta có thể giả sử

$$x_1 \geq \cdots \geq x_n, \quad y_1 \geq \cdots \geq y_n.$$

Từ giả thiết, ta có

$$x_1 \geq y_1 \geq \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq x_n.$$

Nếu $y_1 = x_n$ thì tất cả các x_i, y_i đều bằng x_n , và kết luận hiển nhiên.

Xét trường hợp $y_1 > x_n$. Chọn $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ sao cho

$$x_k \geq y_1 > x_{k+1}$$

và đặt

$$t = x_k + x_{k+1} - y_1.$$

Khi đó

$$x_{k+1} \leq t \leq x_k, \quad y_1 + t = x_k + x_{k+1}.$$

Theo bổ đề làm đều hai số,

$$f(x_k) + f(x_{k+1}) \geq f(y_1) + f(t).$$

Xét bộ $n - 1$ số

$$z = (z_1, \dots, z_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+2}, \dots, x_n).$$

Các thành phần của z đã được sắp xếp theo thứ tự không tăng. Ta sẽ chứng minh

$$z \succeq (y_2, \dots, y_n).$$

Trước hết, hai bộ có cùng tổng, vì

$$\sum_{i=1}^{n-1} z_i = \sum_{i=1}^n x_i - y_1 = \sum_{i=2}^n y_i.$$

Với $1 \leq m \leq n - 2$, ta xét hai trường hợp:

- Nếu $m < k$ thì $x_1, \dots, x_m \geq y_1$, do đó

$$\sum_{i=1}^m z_i = \sum_{i=1}^m x_i \geq m y_1 \geq \sum_{i=2}^{m+1} y_i.$$

- Nếu $m \geq k$ thì từ $x \succeq y$, ta có

$$\sum_{i=1}^m z_i = \sum_{i=1}^{m+1} x_i - y_1 \geq \sum_{i=1}^{m+1} y_i - y_1 = \sum_{i=2}^{m+1} y_i.$$

Vậy quan hệ trội cần chứng minh được thiết lập.

Áp dụng giả thiết quy nạp, suy ra

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq f(y_1) + \sum_{i=1}^{n-1} f(z_i) \geq f(y_1) + \sum_{i=2}^n f(y_i) = \sum_{i=1}^n f(y_i).$$

Giả sử thêm rằng f lồi nghiêm ngặt và xảy ra dấu bằng. Khi đó, cả hai bất đẳng thức trong chuỗi trên đều là đẳng thức. Theo điều kiện dấu bằng của bổ đề, cặp (x_k, x_{k+1}) trùng với cặp (y_1, t) sau một phép hoán vị. Theo giả thiết quy nạp, bộ z trùng với $(y_2, \dots, y_n)$ sau một phép hoán vị. Kết hợp hai điều này, suy ra x, y trùng nhau sau một phép hoán vị. Chiều ngược lại hiển nhiên.

Các kết luận đối với hàm lõm được suy ra bằng cách áp dụng kết quả trên cho hàm lồi $-f$. $\square$

Nhận xét 3 (Liên hệ với bất đẳng thức Jensen). Đặt $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. Với mọi bộ số thực $x = (x_1, \dots, x_n)$, ta luôn có

$$x \succeq (\bar{x}, \dots, \bar{x}).$$

Thật vậy, giả sử $x_1 \geq \dots \geq x_n$. Với $1 \leq k < n$, đặt $A_k = x_1 + \dots + x_k$. Do $x_i \leq x_k \leq A_k/k$ với mọi $i > k$, ta được

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \leq A_k + (n-k)\frac{A_k}{k} = \frac{nA_k}{k}.$$

Vì thế $A_k \geq k\bar{x}$, chứng tỏ quan hệ trội trên.

Bởi vậy, Karamata cho ta bất đẳng thức Jensen với các trọng số bằng nhau:

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Nếu f lồi nghiêm ngặt thì dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = \dots = x_n$.

Nhận xét 4. Ý tưởng của Karamata là: khi làm đều các thành phần mà giữ nguyên tổng, tổng giá trị của một hàm lồi không tăng. Bổ đề làm đều hai số là bước cơ bản; quan hệ trội bảo đảm có thể thực hiện các bước ấy để lần lượt tạo ra các thành phần của bộ y .

Khi áp dụng, cần sắp xếp riêng từng bộ theo cùng thứ tự, kiểm tra các tổng từng phần và kiểm tra đẳng thức của hai tổng toàn bộ. Hàm lồi không cần đơn điệu hay khả vi.

Điều kiện lồi nghiêm ngặt là cần thiết cho kết luận tổng quát về dấu bằng: nếu $f(t) = at + b$ thì hai tổng giá trị luôn bằng nhau ngay khi hai bộ có cùng tổng.