

Bất đẳng thức đẳng chu cho đa giác

Định lý 1 (Bất đẳng thức đẳng chu cho đa giác). Cho đa giác đơn n cạnh, với $n \geq 3$, có chu vi L và diện tích S . Khi đó

$$S \leq \frac{L^2}{4n \tan(\pi/n)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đa giác đã cho là đa giác đều.

Hai chứng minh dưới đây cùng sử dụng một bổ đề về đa giác có diện tích cực đại.

Bổ đề 1. Cho số nguyên $n \geq 3$ và số thực $L > 0$. Trong các đa giác lồi có không quá n cạnh và chu vi không vượt quá L , tồn tại đa giác có diện tích lớn nhất.

Mọi đa giác đạt diện tích lớn nhất đều có chu vi bằng L và các cạnh bằng nhau.

Chứng minh. Trước hết, ta giải thích sự tồn tại cực đại. Trong quá trình lấy giới hạn, cho phép đa giác suy biến thành một đoạn thẳng hoặc một điểm; chu vi của một đoạn thẳng được hiểu là hai lần độ dài của nó.

Xét một dãy đa giác có diện tích tiến tới supremum của các diện tích đang xét. Tịnh tiến mỗi đa giác để một đỉnh nằm tại gốc tọa độ. Biểu diễn mỗi đa giác bằng một danh sách n đỉnh theo thứ tự trên biên, bằng cách lặp lại một số đỉnh nếu cần. Vì chu vi không vượt quá L , mọi đỉnh đều nằm trong đĩa tâm O , bán kính L .

Theo định lý Bolzano–Weierstrass, có thể chọn một dãy con sao cho từng đỉnh trong danh sách đều hội tụ. Đa giác giới hạn vẫn lồi, có không quá n cạnh. Các công thức tọa độ của chu vi và diện tích cho thấy chu vi và diện tích của nó là các giới hạn tương ứng. Do đó, đa giác giới hạn đạt diện tích lớn nhất.

Giá trị lớn nhất này dương, vì lớp đa giác đang xét chứa một tam giác không suy biến. Vậy đa giác cực đại không suy biến. Chu vi của nó phải bằng L ; nếu nhỏ hơn L , một phép vị tự phóng to sẽ làm tăng diện tích mà vẫn giữ chu vi không vượt quá L .

Gọi P là một đa giác cực đại. Bỏ các đỉnh thừa nằm trên cùng một cạnh, ta có thể viết $P = A_1 A_2 \cdots A_k$, trong đó $3 \leq k \leq n$ và mọi góc trong đều nhỏ hơn π . Vì thế, mọi biến dạng đủ nhỏ của các đỉnh vẫn giữ được tính lồi của đa giác.

Xét ba đỉnh liên tiếp A, B, C của P . Đặt

$$AC = a, \quad AB = b, \quad BC = c, \quad p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Giả sử $b \neq c$. Giữ cố định A, C và tổng $b + c$. Theo công thức Heron,

$$S_{ABC}^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{p(p-a)}{4}(a^2 - (b-c)^2).$$

Bởi vậy, nếu thay đổi b, c một lượng đủ nhỏ, giữ nguyên tổng và làm giảm $|b - c|$, thì diện tích tam giác ABC tăng thực sự.

Có thể chọn đỉnh mới B' cùng phía với B đối với AC và gần B tùy ý, với các độ dài mới nói trên. Khi B' đủ gần B , đa giác mới vẫn lồi. Chu vi không đổi, còn diện tích tăng đúng bằng $S_{AB'C} - S_{ABC} > 0$, trái với tính cực đại của P .

Vậy $AB = BC$. Áp dụng cho mọi cặp cạnh liên tiếp, suy ra tất cả các cạnh của P bằng nhau. $\square$

Ta ghi nhận thêm hai nhận xét dùng chung.

Thứ nhất, đặt

$$\Phi(t) = \frac{1}{4t \tan(\pi/t)}, \quad t \geq 3.$$

Hàm Φ tăng nghiêm ngặt. Thật vậy, đặt $x = \pi/t$ thì

$$\Phi(t) = \frac{1}{4\pi} x \cot x,$$

trong khi

$$\frac{d}{dx}(x \cot x) = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x} < 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

do $\sin(2x) < 2x$.

Đa giác đều m cạnh có chu vi L có cạnh $a = L/m$ và bán kính đường tròn nội tiếp $r = a/(2 \tan(\pi/m))$. Diện tích của nó bằng

$$\frac{1}{2} Lr = \frac{L^2}{4m \tan(\pi/m)} = L^2 \Phi(m).$$

Thứ hai, nếu P là một đa giác đơn có n cạnh thì bao lồi H của nó có không quá n cạnh và thỏa mãn

$$S(H) \geq S(P), \quad L(H) \leq L(P).$$

Bất đẳng thức về chu vi suy ra từ bất đẳng thức tam giác. Nếu P không lồi thì $S(H) > S(P)$. Vì thế, để chứng minh định lý và xét đẳng thức, chỉ cần xác định các đa giác cực đại trong Bổ đề 1.

Chứng minh 1. Cố định n và L . Gọi P là một đa giác có diện tích lớn nhất trong lớp đa giác của Bổ đề 1. Giả sử P có k cạnh và diện tích Δ . Theo bổ đề,

$$3 \leq k \leq n, \quad a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = \frac{L}{k}.$$

Do đó

$$\sum_{j=0}^{k-1} a_j^2 = \frac{L^2}{k}.$$

Biểu diễn các đỉnh của P trên mặt phẳng phức, theo chiều ngược chiều kim đồng hồ, bởi $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}$. Quy ước $z_k = z_0$ và đặt

$$\theta = \frac{\pi}{k}, \quad \omega = e^{2\pi i/k}.$$

Với $0 \leq m \leq k-1$, đặt

$$c_m = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} z_j \omega^{-jm}.$$

Từ hệ thức trực giao

$$\sum_{j=0}^{k-1} \omega^{j(m-\ell)} = \begin{cases} k, & m = \ell, \\ 0, & m \neq \ell, \end{cases} \quad 0 \leq m, \ell \leq k-1,$$

ta có biểu diễn ngược

$$z_j = \sum_{m=0}^{k-1} c_m \omega^{jm}.$$

Cũng nhờ hệ thức trực giao,

$$\sum_{j=0}^{k-1} \bar{z}_j z_{j+1} = k \sum_{m=0}^{k-1} |c_m|^2 \omega^m.$$

Theo công thức diện tích có hướng,

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \overline{z_j} z_{j+1} \right) \\ &= \frac{k}{2} \sum_{m=1}^{k-1} |c_m|^2 \sin(2m\theta) \\ &= k \sum_{m=1}^{k-1} |c_m|^2 \sin(m\theta) \cos(m\theta).\end{aligned}$$

Mặt khác,

$$z_{j+1} - z_j = \sum_{m=1}^{k-1} c_m (\omega^m - 1) \omega^{jm}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k-1} a_j^2 &= \sum_{j=0}^{k-1} |z_{j+1} - z_j|^2 \\ &= k \sum_{m=1}^{k-1} |c_m|^2 |\omega^m - 1|^2 \\ &= 4k \sum_{m=1}^{k-1} |c_m|^2 \sin^2(m\theta).\end{aligned}$$

Kết hợp hai công thức trên, ta được

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k-1} a_j^2 - 4\Delta \tan \theta &= 4k \sum_{m=1}^{k-1} |c_m|^2 \sin(m\theta) (\sin(m\theta) - \tan \theta \cos(m\theta)) \\ &= \frac{4k}{\cos \theta} \sum_{m=1}^{k-1} |c_m|^2 \sin(m\theta) \sin((m-1)\theta) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Thật vậy, các hệ số trong tổng đều không âm, và dương với mọi $2 \leq m \leq k-1$.

Vì các cạnh của P bằng nhau, suy ra

$$4\Delta \tan \frac{\pi}{k} \leq \sum_{j=0}^{k-1} a_j^2 = \frac{L^2}{k}.$$

Do đó

$$\Delta \leq L^2 \Phi(k) \leq L^2 \Phi(n).$$

Theo phép lấy bao lồi đã trình bày ở trên, mọi đa giác đơn n cạnh có chu vi L đều có diện tích không vượt quá Δ . Vậy

$$S \leq \frac{L^2}{4n \tan(\pi/n)}.$$

Đa giác đều n cạnh có chu vi L đạt diện tích $L^2 \Phi(n)$, nên đây chính là diện tích lớn nhất. Bởi vậy, đối với mọi đa giác cực đại, các bất đẳng thức trên đều là đẳng thức. Tính tăng nghiêm ngặt của Φ cho $k = n$, còn đẳng thức trong phép tính Fourier cho

$$c_2 = c_3 = \dots = c_{k-1} = 0.$$

Vì $\Delta > 0$, ta có $c_1 \neq 0$, và

$$z_j = c_0 + c_1 \omega^j, \quad 0 \leq j \leq k-1.$$

Đây chính là các đỉnh của một đa giác đều k cạnh.

Cuối cùng, đa giác không lồi không thể đạt đẳng thức, vì bao lồi của nó có diện tích lớn hơn. Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đa giác đã cho là đa giác đều n cạnh. $\square$

Chứng minh 2. Ta cần bổ đề sau về một biến dạng nhỏ của tứ giác.

Bổ đề 2. Cho tứ giác lồi $ABCD$ không nội tiếp. Có thể giữ cố định A, D , dịch chuyển B, C những lượng nhỏ tùy ý, sao cho tứ giác mới vẫn lồi, giữ nguyên độ dài bốn cạnh và có diện tích lớn hơn.

Chứng minh. Đặt

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d, \quad \alpha = \angle ABC, \quad \beta = \angle ADC,$$

và gọi K là diện tích tứ giác. Theo công thức diện tích tam giác,

$$2K = ab \sin \alpha + cd \sin \beta.$$

Áp dụng định lý cosin cho đường chéo AC , ta có

$$ab \cos \alpha - cd \cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}.$$

Bình phương rồi cộng hai đẳng thức trên, suy ra

$$4K^2 = a^2 b^2 + c^2 d^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4} - 2abcd \cos(\alpha + \beta).$$

Bây giờ coi $x = AC$ là một tham số. Khi bốn cạnh giữ nguyên,

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab}, \quad \cos \beta = \frac{c^2 + d^2 - x^2}{2cd}.$$

Vì hai tam giác ABC và ADC đều không suy biến, x có thể thay đổi trong một khoảng mở chứa giá trị ban đầu. Trong khoảng đó, cả α và β đều là các hàm liên tục, tăng nghiêm ngặt theo x .

Do $ABCD$ không nội tiếp,

$$\alpha + \beta \neq \pi.$$

Vì thế, có thể thay đổi x một lượng nhỏ tùy ý để $\alpha + \beta$ tiến gần hơn tới π . Khi ấy $\cos(\alpha + \beta)$ giảm, nên công thức trên cho thấy K tăng thực sự.

Ghép hai tam giác tương ứng ở hai phía của đường chéo AC , ta thu được một tứ giác gần tứ giác ban đầu tùy ý. Với biến dạng đủ nhỏ, tứ giác mới vẫn lồi. Sau một phép dời hình gần phép đồng nhất, ta có thể đưa cạnh AD về đúng vị trí ban đầu. Khi đó A, D được giữ cố định, còn B, C chỉ dịch chuyển những lượng nhỏ tùy ý. $\square$

Cố định n, L và lấy một đa giác cực đại $P = A_1 A_2 \cdots A_k$ như trong Bổ đề 1. Ta biết rằng $3 \leq k \leq n$, chu vi của P bằng L và tất cả các cạnh của nó bằng nhau.

Nếu $k = 3$ thì P là tam giác đều. Xét trường hợp $k \geq 4$. Lấy bốn đỉnh liên tiếp

$$A = A_i, \quad B = A_{i+1}, \quad C = A_{i+2}, \quad D = A_{i+3},$$

với $1 \leq i \leq k-3$.

Giả sử $ABCD$ không nội tiếp. Theo Bổ đề 2, có thể giữ A, D cố định và dịch chuyển B, C những lượng đủ nhỏ, giữ nguyên ba độ dài AB, BC, CD , nhưng làm tăng diện tích tứ giác $ABCD$. Giữ nguyên mọi đỉnh còn lại của P .

Vì các góc trong của P đều nhỏ hơn π , khi biến dạng đủ nhỏ, đa giác mới vẫn lồi. Chu vi của nó không đổi. Phần đa giác nằm ở phía còn lại của đường chéo AD không thay đổi, nên diện tích toàn đa giác tăng đúng bằng độ tăng diện tích của tứ giác $ABCD$. Điều này trái với tính cực đại của P .

Vậy mọi bốn đỉnh liên tiếp đều cùng nằm trên một đường tròn. Hai bộ bốn đỉnh liên tiếp có chung ba đỉnh không thẳng hàng, nên các đường tròn tương ứng trùng nhau. Suy ra tất cả các đỉnh của P cùng nằm trên một đường tròn.

Một đa giác lồi nội tiếp có các cạnh bằng nhau là đa giác đều. Để thấy rõ điều này, gọi $\theta \in (0, \pi]$ là số đo cung nhỏ chắn bởi một cạnh. Mỗi cung giữa hai đỉnh liên tiếp có số đo θ hoặc $2\pi - \theta$. Nếu có một cung thuộc loại thứ hai thì tổng số đo các cung ít nhất là

$$2\pi - \theta + (k-1)\theta = 2\pi + (k-2)\theta > 2\pi,$$

vô lý. Do đó mọi cung liên tiếp đều có số đo $\theta = 2\pi/k$, và P là đa giác đều.

Như vậy, mọi đa giác cực đại đều là đa giác đều k cạnh với một số $k \leq n$. Diện tích của nó bằng

$$L^2\Phi(k).$$

Mặt khác, đa giác đều n cạnh có chu vi L là một đối tượng được phép xét, với diện tích $L^2\Phi(n)$. Tính cực đại và tính tăng nghiêm ngặt của Φ cho

$$L^2\Phi(n) \leq L^2\Phi(k) \leq L^2\Phi(n),$$

nên $k = n$. Vậy diện tích lớn nhất bằng

$$\frac{L^2}{4n \tan(\pi/n)},$$

và chỉ các đa giác đều n cạnh đạt giá trị ấy. Kết hợp với phép lấy bao lồi, định lý được chứng minh cho mọi đa giác đơn. $\square$

Nhận xét 1. Bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^n a_j^2 \geq 4S \tan \frac{\pi}{n}$$

không tự nó suy ra bất đẳng thức đẳng chu theo chu vi, bởi Cauchy–Schwarz chỉ cho

$$L^2 \leq n \sum_{j=1}^n a_j^2.$$

Trong Chứng minh 1, bước quyết định là quy về đa giác cực đại có các cạnh bằng nhau; khi đó

$$\sum_{j=1}^n a_j^2 = \frac{L^2}{n},$$

và phép suy luận mới hợp lệ.

Nhận xét 2. Vì $\tan x > x$ với $0 < x < \pi/2$, mọi đa giác đơn n cạnh có chu vi L và diện tích S đều thỏa mãn

$$S \leq \frac{L^2}{4n \tan(\pi/n)} < \frac{L^2}{4\pi}.$$

Mặt khác,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n \tan(\pi/n)} = \frac{1}{4\pi}.$$

Xét các đa giác đều có số cạnh tăng dần, suy ra $1/(4\pi)$ là hằng số nhỏ nhất C sao cho $S < CL^2$ với mọi đa giác đơn.

Dạng tổng quát cho đường cong là *bất đẳng thức đẳng chu cổ điển*: nếu Γ là một đường cong kín đơn trên mặt phẳng, có độ dài hữu hạn L và bao quanh một miền có diện tích S , thì $4\pi S \leq L^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi Γ là một đường tròn. Nói cách khác, trong các miền được bao quanh bởi một đường cong kín đơn có độ dài cho trước, hình tròn có diện tích lớn nhất.

Phần bất đẳng thức cho đường cong có thể thu được bằng cách xấp xỉ Γ bởi các đa giác đơn có chu vi và diện tích hội tụ tương ứng tới L và S , rồi áp dụng kết quả cho đa giác và lấy giới hạn. Tuy nhiên, điều kiện xảy ra đẳng thức cần một lập luận bổ sung; nó không suy ra trực tiếp từ điều kiện đẳng thức trong trường hợp đa giác.

T's Lab