

IMO 2026/3. Cho số nguyên dương n . Lưu Bang và Hạng Vũ muốn chia nhau một thanh que dài 1. Lưu Bang đánh dấu không quá n điểm trên thanh que, rồi Hạng Vũ cũng đánh dấu không quá n điểm; tất cả các điểm được đánh dấu đôi một phân biệt. Thanh que được cắt tại những điểm này. Sau đó, hai người luân phiên lấy một đoạn chưa được chọn, Lưu Bang đi trước. Mỗi người đều muốn tối đa hóa tổng độ dài các đoạn mình nhận được.

Tìm giá trị lớn nhất của c để Lưu Bang có thể bảo đảm nhận được tổng độ dài ít nhất c , bất kể cách chơi của Hạng Vũ.

Lời giải. Giá trị cần tìm là

$$c_n = \frac{2^n}{2^{n+1} - 1}.$$

Đặt $D = 2^{n+1} - 1$. Nhân tất cả độ dài với D , ta chỉ cần chứng minh giá trị bảo đảm của Lưu Bang đối với thanh que dài D là 2^n .

Trước hết, xét một bộ đoạn que có độ dài $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_M > 0$ và đặt

$$E = \sum_{i=1}^{\lfloor M/2 \rfloor} y_{2i}.$$

Bằng cách luân lấy đoạn dài nhất còn lại, người đi trước bảo đảm nhận được ít nhất $y_1 + y_3 + \dots$, còn người đi sau bảo đảm nhận được ít nhất E , bất kể cách lấy của đối phương. Thật vậy, trước lượt thứ i của họ, lần lượt mới có $2i - 2$ và $2i - 1$ đoạn bị lấy. Do đó, với bộ đoạn que đã cố định, giá trị bảo đảm của Lưu Bang chính là $D - E$.

Ta cũng lưu ý rằng thêm một cặp đoạn cùng độ dài u làm E tăng đúng u : có thể xếp hai đoạn này liền nhau, còn tính chẵn lẻ của vị trí các đoạn khác không đổi. Vì thế, nếu các đoạn được ghép thành những cặp bằng nhau, chỉ còn một đoạn lẻ dài r (hoặc không còn đoạn lẻ khi $r = 0$), thì

$$E = \frac{D - r}{2}.$$

1. Chiến thuật của Lưu Bang.

Lưu Bang chia thanh que thành $n + 1$ đoạn dài

$$1, 2, 4, \dots, 2^n.$$

Sau khi Hạng Vũ đánh dấu, số đoạn thu được là $M \leq 2n + 1$. Sắp xếp độ dài của chúng thành $y_1 \geq \dots \geq y_M$ và đặt

$$K = \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \leq n, \quad S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^k y_{2i}.$$

Ta chứng minh bằng quy nạp rằng

$$S_k \leq 2^n - 2^{n-k} \quad (0 \leq k \leq K).$$

Khẳng định hiển nhiên với $k = 0$. Giả sử đúng với $k - 1$ nhưng sai với $k \geq 1$. Khi đó

$$y_{2k} = S_k - S_{k-1} > 2^{n-k}.$$

Vì vậy, $2k$ đoạn dài nhất đều nằm trong các đoạn ban đầu có độ dài $2^{n-k+1}, \dots, 2^n$. Suy ra

$$2S_k \leq \sum_{i=1}^{2k} y_i \leq \sum_{j=n-k+1}^n 2^j = 2^{n+1} - 2^{n-k+1},$$

trái với $S_k > 2^n - 2^{n-k}$. Phép quy nạp hoàn tất.

Do đó

$$E = S_K \leq 2^n - 2^{n-K} \leq 2^n - 1.$$

Lưu Bang luôn lấy đoạn dài nhất còn lại thì nhận được ít nhất $D - E \geq 2^n$.

2. Chiến thuật của Hạng Vũ.

Giả sử các điểm của Lưu Bang chia thành que thành $m \leq n + 1$ đoạn. Nếu $m \leq n$, Hạng Vũ chia đôi từng đoạn. Khi đó tất cả các đoạn ghép được thành những cặp bằng nhau, nên Lưu Bang không thể bảo đảm nhận nhiều hơn $D/2 < 2^n$.

Xét $m = n + 1$, với các độ dài ban đầu là $x_1, \dots, x_m > 0$. Có 2^m tổng tập con

$$\sum_{i \in A} x_i, \quad A \subseteq \{1, \dots, m\},$$

đều thuộc $[0, D]$, trong đó mỗi tập con được tính riêng, kể cả khi các tổng bằng nhau. Gọi r là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai tổng ứng với hai tập con khác nhau. Sắp xếp các tổng này theo thứ tự tăng không ngắt, ta được

$$0 \leq r \leq \frac{D}{2^m - 1} = 1.$$

Ngoài ra, $r \leq \min_i x_i$, vì 0 và x_i cũng là hai tổng tập con.

Chọn hai tập con đạt khoảng cách r rồi loại các chỉ số chung. Ta được hai tập rời nhau I, J , với $I \cup J \neq \emptyset$, sao cho

$$\sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j = r.$$

Đặt $p = |I|$, $q = |J|$. Ta sẽ dùng không quá $p + q - 1$ nhát cắt để ghép các đoạn này thành những cặp bằng nhau, chỉ còn phần lẻ dài r .

Nếu $J = \emptyset$, từ $r \leq \min_i x_i$ suy ra $p = 1$, nên không cần cắt. Nếu $J \neq \emptyset$, tưởng tượng xếp các đoạn thuộc I nối tiếp nhau thành một hàng, các đoạn thuộc J thành hàng thứ hai, cùng bắt đầu tại một vị trí. Hàng thứ nhất dài hơn hàng thứ hai đúng r . Vì $r \leq \min_i x_i$, phần thừa này nằm trọn trong đoạn cuối của hàng thứ nhất. Trên phần chung, cắt bỏ sung mỗi hàng tại các vị trí đầu mút của các đoạn ở hàng kia. Các đoạn đối diện khi đó có độ dài bằng nhau. Số nhát cắt không vượt quá

$$(p - 1) + q = p + q - 1 :$$

có $p - 1$ điểm nối ở hàng thứ nhất và q đầu mút bên phải của các đoạn ở hàng thứ hai cần xét; những vị trí đã là đầu mút thì không cần cắt. Mỗi vị trí nằm trong lòng một đoạn chỉ được cắt một lần, nên các điểm đánh dấu mới đôi một phân biệt và không trùng với các điểm của Lưu Bang.

Cuối cùng, Hạng Vũ chia đôi từng đoạn không thuộc $I \cup J$. Tổng số nhát cắt không vượt quá

$$(p + q - 1) + (m - p - q) = m - 1 = n.$$

Như vậy, tất cả các đoạn đều ghép được thành những cặp bằng nhau, chỉ còn phần lẻ dài $r \leq 1$. Hạng Vũ luôn lấy đoạn dài nhất còn lại thì bảo đảm nhận được ít nhất $(D - r)/2$, khiến phần của Lưu Bang không vượt quá

$$\frac{D + r}{2} \leq \frac{D + 1}{2} = 2^n.$$

Kết hợp hai chiều rồi chia các độ dài cho D , ta thu được kết quả. □