

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2026-2027

Ngày thi thứ nhất: 14 tháng 9 năm 2026

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_{n+1} = \frac{3-u_n^2}{2}$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2 (5,0 điểm). Tìm tất cả các cặp số nguyên tố lẻ (p, q) , với $p < q$, thỏa mãn $p^{p^2} + (p+2)^{p^2}$ chia hết cho q và C_{3pq}^{pq} chia hết cho pq .

Bài 3 (4,0 điểm). Cho số nguyên n lớn hơn 3 và một đa giác đều P có $2n$ đỉnh. Một tam giác được gọi là phủ đa giác P nếu tất cả các đỉnh của P đều nằm trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác.

Tính số tam giác phủ đa giác P tạo bởi ba đường thẳng chứa ba cạnh của đa giác P .

Bài 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC ($AB < AC < BC$) nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại trực tâm H .

- Gọi A_0, B_0, C_0 tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Gọi X là giao điểm của hai đường thẳng B_0O và C_0A_0 , Y là giao điểm của hai đường thẳng C_0O và A_0B_0 . Hai đường thẳng XY và B_0C_0 cắt nhau tại điểm Z . Chứng minh đường thẳng AH vuông góc với đường thẳng AZ .
- Kẻ đường kính AK của đường tròn (O) . Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BB_1, CC_1 . Chứng minh đường thẳng MN đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác AHK .

Thời gian: 180 phút.

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2026-2027

Ngày thi thứ hai: 15 tháng 9 năm 2026

Bài 5 (5,0 điểm). Xét hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) > 0$ và

$$f(a)f(d) - f(b)f(c) = 1$$

với mọi số thực a, b, c, d thỏa mãn $ad - bc = 1$.

- a) Chứng minh $f(xy) = f(x)f(y)$ với mọi số thực x và y .
- b) Chứng minh $f(x) = x$ với mọi số thực x .

Bài 6 (5,0 điểm). Cho $P(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên có bậc bằng 5 sao cho có vô hạn cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $xP(x) = yP(y)$ và $x \neq y$.

- a) Chứng minh tồn tại số nguyên C có tính chất: Nếu (x, y) là cặp số nguyên thỏa mãn $x \neq y$ và $xP(x) = yP(y)$ thì $|x + y| \leq C$.
- b) Chứng minh $P(x)$ có nghiệm nguyên.

Bài 7 (5,0 điểm). Cho số nguyên dương lẻ n . Một số nguyên dương m được gọi là số tốt nếu $m^x + x^m$ chia hết cho $n^x + x^n$ với mọi số nguyên dương x .

- a) Chứng minh nếu m là một số tốt thì m chia hết cho n .
- b) Tìm tất cả các số tốt.

Bài 8 (5,0 điểm). Cho 9 số thực $a_1, a_2, \dots, a_9$. Khởi đầu với bộ 9 số thực $(a_1, a_2, \dots, a_9)$.

Ở mỗi bước, từ bộ vừa được tạo $(x_1, x_2, \dots, x_9)$, ta tạo ra một bộ mới $(y_1, y_2, \dots, y_9)$ theo quy tắc sau: chọn các số $\epsilon_1, \dots, \epsilon_9 \in \{-1; 1\}$ sao cho biểu thức

$$\left| \sum_{i=1}^9 \epsilon_i x_i \sqrt{i} \right|$$

đạt giá trị nhỏ nhất (nếu có nhiều cách chọn, lấy một cách tùy ý), sau đó đặt $y_i = x_i + \epsilon_i \sqrt{i}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, 9$.

Chứng minh sau hữu hạn bước, sẽ xuất hiện một bộ $(u_1, u_2, \dots, u_9)$ sao cho tồn tại chỉ số i để $|u_i| \geq \frac{15}{2}$.

Thời gian: 180 phút.