

Định lý 1. Các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

chính là

$$f \equiv 0, \quad f(x) = \cos(cx), \quad f(x) = \cosh(cx),$$

trong đó $c \geq 0$ và $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$.

Chứng minh. Các hàm số nêu trên đều thỏa mãn yêu cầu. Ta chứng minh không còn nghiệm nào khác.

Thay $y = 0$ vào (1), ta được $f(x)(1 - f(0)) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nếu $f \not\equiv 0$ thì $f(0) = 1$. Khi đó, lần lượt thay $x = 0$ và $y = x$ vào (1), ta có

$$f(-x) = f(x), \quad f(2x) = 2f(x)^2 - 1 \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (2)$$

Do f liên tục tại 0 và $f(0) = 1$, tồn tại $a > 0$ sao cho $f(t) > 0$ với mọi $t \in [0, a]$. Ta chọn hàm h như sau:

Nếu $0 < f(a) \leq 1$, chọn $\alpha \in [0, \pi/2)$ sao cho $\cos \alpha = f(a)$ và đặt $h(x) = \cos(\alpha x/a)$. Nếu $f(a) > 1$, chọn $\alpha > 0$ sao cho $\cosh \alpha = f(a)$ và đặt $h(x) = \cosh(\alpha x/a)$.

Trong cả hai trường hợp, h là một nghiệm của (1), $h(0) = 1$, $h(a) = f(a)$ và $h(t) > 0$ với mọi $t \in [0, a]$. Ta sẽ chứng minh $f = h$.

Từ (2) và tính dương trên $[0, a]$, ta có

$$f\left(\frac{a}{2^{m+1}}\right) = \sqrt{\frac{1 + f(a/2^m)}{2}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Hàm h cũng thỏa mãn hệ thức này. Vì $f(a) = h(a)$, bằng quy nạp suy ra

$$f\left(\frac{a}{2^m}\right) = h\left(\frac{a}{2^m}\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Cố định $m \geq 0$ và đặt $t = a/2^m$. Theo (1),

$$f((n+1)t) = 2f(t)f(nt) - f((n-1)t), \quad n \geq 1.$$

Hàm h cũng thỏa mãn hệ thức truy hồi này. Từ $f(0) = h(0) = 1$ và $f(t) = h(t)$, bằng quy nạp suy ra $f(nt) = h(nt)$ với mọi số nguyên $n \geq 0$. Do f và h đều chẵn, kết quả còn đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Vì thế,

$$f\left(\frac{na}{2^m}\right) = h\left(\frac{na}{2^m}\right) \quad (n \in \mathbb{Z}, m = 0, 1, 2, \dots).$$

Tập các số $na/2^m$ trù mật trong $\mathbb{R}$. Nhờ tính liên tục của f và h , ta được $f = h$ trên $\mathbb{R}$, như cần chứng minh. $\square$

Định lý 2. Các hàm số liên tục $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \quad x > y > 0, \quad (3)$$

chính là $f(x) = \cosh(cx)$ với $c \geq 0$.

Chứng minh. Cố định $a > 0$. Với $0 < y < a$, từ (3) ta có

$$f(y) = \frac{f(a+y) + f(a-y)}{2f(a)}.$$

Do f liên tục tại a và $f(a) > 0$, suy ra

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) = 1.$$

Đặt

$$F(x) = \begin{cases} f(|x|), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Khi đó F là hàm liên tục, chẵn và dương trên $\mathbb{R}$. Từ giả thiết và tính liên tục, ta có

$$F(u+v) + F(u-v) = 2F(u)F(v), \quad u \geq v \geq 0.$$

Với $x, y \in \mathbb{R}$ bất kỳ, đặt $u = \max\{|x|, |y|\}$ và $v = \min\{|x|, |y|\}$. Do F chẵn,

$$F(x+y) + F(x-y) = F(u+v) + F(u-v) = 2F(u)F(v) = 2F(x)F(y).$$

Áp dụng Định lý 1, ta được $F \equiv 0$, $F(x) = \cos(cx)$ hoặc $F(x) = \cosh(cx)$ với $c \geq 0$. Tính dương của F loại trường hợp $F \equiv 0$ và trường hợp $F(x) = \cos(cx)$ với $c > 0$. Trường hợp $c = 0$ cho hàm hằng 1, cũng thuộc họ $\cosh(cx)$.

Vậy $f(x) = \cosh(cx)$ với $c \geq 0$. Ngược lại, các hàm số này đều thỏa mãn yêu cầu. $\square$