

Với một tập hợp hữu hạn, ta đo kích thước của nó bằng số phần tử. Đối với các tập hợp vô hạn, việc so sánh kích thước được thực hiện thông qua các song ánh. Theo cách so sánh này, các tập hợp $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{Q}$ có cùng lực lượng, trong khi tập các số thực thuộc khoảng $(0; 1)$ có lực lượng lớn hơn.

Trong bài viết này, ta quy ước

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Trước hết, nhắc lại rằng một ánh xạ $f : A \rightarrow B$ được gọi là:

- (i) *đơn ánh* nếu $f(a) = f(a')$ kéo theo $a = a'$ với mọi $a, a' \in A$;
- (ii) *toàn ánh* nếu với mỗi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$;
- (iii) *song ánh* nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Định nghĩa 1. Hai tập hợp A, B được gọi là *cùng lực lượng* nếu tồn tại một song ánh $f : A \rightarrow B$. Khi đó ta viết

$$|A| = |B|.$$

Ký hiệu $|A|$ chỉ *lực lượng* của tập hợp A . Với một tập hợp hữu hạn, lực lượng chính là số phần tử của tập hợp đó; đặc biệt, $|\emptyset| = 0$.

Ta viết $|A| \leq |B|$ nếu tồn tại một đơn ánh từ A vào B . Ta viết $|A| < |B|$ nếu $|A| \leq |B|$ nhưng không tồn tại song ánh giữa A và B .

Định nghĩa 2. Một tập hợp A được gọi là *vô hạn đếm được* nếu tồn tại một song ánh từ $\mathbb{N}$ đến A . Lực lượng của một tập hợp như vậy được ký hiệu là $\aleph_0$, tức là

$$|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Theo quy ước dùng trong bài viết, một tập hợp được gọi là *đếm được* nếu nó hữu hạn hoặc vô hạn đếm được. Một tập hợp không thỏa mãn điều kiện này được gọi là *không đếm được*.

Như vậy, một tập hợp A vô hạn đếm được khi và chỉ khi ta có thể liệt kê tất cả các phần tử của nó thành một dãy

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

sao cho mỗi phần tử của A xuất hiện đúng một lần. Khi đó, ánh xạ $n \mapsto a_n$ là một song ánh từ $\mathbb{N}$ đến A .

Định lý 1. Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ vô hạn đếm được.

Chứng minh. Xét ánh xạ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ được xác định bởi

$$f(2n) = n, \quad f(2n+1) = -n-1 \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Các chỉ số chẵn cho tất cả các số nguyên không âm, mỗi số đúng một lần; các chỉ số lẻ cho tất cả các số nguyên âm, mỗi số đúng một lần. Hai tập giá trị này rời nhau và hợp của chúng là $\mathbb{Z}$, nên f là một song ánh.

Đây chính là cách liệt kê

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$$

Vậy $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. □

Định lý 2. Tập hợp các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ vô hạn đếm được.

Chứng minh. Mỗi số hữu tỷ có biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$\frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad \gcd(|p|, q) = 1.$$

Đặc biệt, biểu diễn này của số 0 là 0/1.

Với mỗi số nguyên $n \geq 1$, đặt

$$A_n = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad \gcd(|p|, q) = 1, \quad |p| + q = n \right\}.$$

Nếu $p/q \in A_n$ thì $|p| \leq n - 1$ và $q = n - |p|$. Do đó, A_n là tập hợp hữu hạn. Tính duy nhất của biểu diễn tối giản cho thấy các tập A_n đôi một rời nhau và

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Ta liệt kê lần lượt các phần tử của $A_1, A_2, A_3, \dots$; trong mỗi tập, liệt kê theo thứ tự tăng dần. Chẳng hạn,

$$\underbrace{0}_{A_1}; \quad \underbrace{-1, 1}_{A_2}; \quad \underbrace{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2}_{A_3}; \quad \dots$$

Mỗi số hữu tỷ thuộc đúng một tập A_n , nên xuất hiện đúng một lần. Hơn nữa, mỗi phần tử của A_n đều xuất hiện sau hữu hạn bước, vì $A_1, \dots, A_n$ đều hữu hạn. Vì $\mathbb{Q}$ là tập hợp vô hạn, cách liệt kê trên xác định một song ánh từ $\mathbb{N}$ đến $\mathbb{Q}$.

Vậy $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$. □

Nhận xét. Một tập hợp vô hạn có thể cùng lực lượng với một tập con thực sự của nó. Chẳng hạn,

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}, \quad |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|.$$

Vì vậy, quan hệ bao hàm thực sự giữa hai tập hợp vô hạn không đủ để kết luận rằng lực lượng của chúng khác nhau.

Định lý 3. Tập hợp các số thực thuộc khoảng $(0; 1)$ không đếm được. Hơn nữa,

$$|\mathbb{Z}| < |(0; 1)|.$$

Chứng minh. Ánh xạ

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow (0; 1), \quad u(n) = \frac{1}{n+2}$$

là đơn ánh. Do đó, $(0; 1)$ là một tập hợp vô hạn và $|\mathbb{N}| \leq |(0; 1)|$.

Giả sử $(0; 1)$ đếm được. Khi đó, ta có thể liệt kê tất cả các phần tử của nó thành một dãy

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

Viết các số này dưới dạng thập phân:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots, \\ x_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots, \\ x_3 &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

trong đó $a_{ij} \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Với mỗi số, ta chọn biểu diễn *không có đuôi gồm toàn chữ số 9*. Biểu diễn thập phân thỏa mãn quy ước này là duy nhất.

Xây dựng số

$$y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots, \quad b_n = \begin{cases} 1, & a_{nn} \neq 1, \\ 2, & a_{nn} = 1. \end{cases}$$

Vì $b_n \in \{1, 2\}$ với mọi $n \geq 1$, ta có $y \in (0; 1)$, và biểu diễn này cũng không có đuôi gồm toàn chữ số 9.

Với mỗi $n \geq 1$, chữ số thứ n sau dấu phẩy của y khác chữ số thứ n sau dấu phẩy của x_n , bởi $b_n \neq a_{nn}$. Do tính duy nhất của biểu diễn đã chọn, $y \neq x_n$. Như vậy, y thuộc $(0; 1)$ nhưng không xuất hiện trong dãy $x_1, x_2, x_3, \dots$, mâu thuẫn.

Vậy $(0; 1)$ không đếm được. Kết hợp với đơn ánh u và hai định lý trước, ta được

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0 < |(0; 1)|.$$

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét. Chứng minh trên được gọi là *lập luận đường chéo của Cantor*, vì chữ số b_n được chọn khác chữ số a_{nn} nằm trên đường chéo của bảng các chữ số.

Quy ước về biểu diễn thập phân là cần thiết, bởi một số có thể có hai cách viết, chẳng hạn

$$0,5000\dots = 0,4999\dots$$

Nhờ loại bỏ các biểu diễn có đuôi gồm toàn chữ số 9, việc khác nhau ở một chữ số bảo đảm hai số đang xét khác nhau.

Nhận xét. Với mọi số thực $a < b$, ánh xạ

$$t \mapsto a + (b - a)t$$

là một song ánh từ $(0; 1)$ đến $(a; b)$. Do đó, mọi khoảng mở không rỗng $(a; b)$ đều không đếm được và

$$|(a; b)| = |(0; 1)| > \aleph_0.$$