

IMO2026/6. Cho $a_1, a_2, a_3, \dots$ là một dãy vô hạn các số nguyên dương lớn hơn 1. Giả sử rằng với mọi số nguyên dương n , số a_{n+1} là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn a_n sao cho $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương T và L sao cho

$$a_{n+T} = a_n + L$$

với mọi số nguyên dương n .

T's Lab

Lời giải 1. Gọi P là tập hợp tất cả các ước nguyên tố của a_1 . Tập hợp P là một tập hữu hạn và mỗi số hạng của dãy đều có ít nhất một ước nguyên tố thuộc tập P .

Đặt $M = \prod_{p \in P} p$. Xét một số nguyên dương n . Do mỗi số hạng từ a_1 đến a_n đều chia hết cho ít nhất một phần tử của P , nên chúng không nguyên tố cùng nhau với M . Trong M số nguyên liên tiếp $a_n + 1, a_n + 2, \dots, a_n + M$, tồn tại đúng một số chia hết cho M , ta gọi số đó là x . Khi đó $\gcd(x, a_i) \geq \gcd(M, a_i) > 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Vì a_{n+1} là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn a_n thỏa mãn điều kiện này, ta nhận được

$$a_n < a_{n+1} \leq x \leq a_n + M.$$

Suy ra $a_{n+1} - a_n \leq M$ với mọi số nguyên dương n .

Gọi $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ là tập hợp các số xuất hiện trong dãy, và xét tập hợp

$$V = \{x \in \mathbb{N}^* \mid \gcd(x, a_i) > 1 \text{ với mọi } i \geq 1\}.$$

Khẳng định 1. $A = \{x \in V \mid x \geq a_1\}$.

Chứng minh. Hiển nhiên $A \subset V$. Ta sẽ chứng minh mọi phần tử lớn hơn a_1 của V đều thuộc A . Giả sử tồn tại $x \in V$ thỏa mãn $x > a_1$ và $x \notin A$. Do dãy (a_n) tăng ngặt và không bị chặn trên, tồn tại duy nhất một số nguyên dương n sao cho $a_n < x < a_{n+1}$. Vì $x \in V$, x có ước chung lớn hơn 1 với mọi phần tử của A , nói riêng là với $a_1, a_2, \dots, a_n$. Điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của a_{n+1} . $\square$

Với mọi số nguyên dương c , vì $\gcd(M, a_i) > 1$ với mọi $i \geq 1$ nên $\gcd(M \cdot c, a_i) > 1$ với mọi $i \geq 1$. Do đó phần tử $M \cdot c$ luôn thuộc tập V với mọi $c \geq 1$.

Khẳng định 2. Nếu tồn tại $x \in V$ và $i > 1$ sao cho x và a_i không có ước nguyên tố chung nào nhỏ hơn hoặc bằng M thì $a_i \leq M(M + 1)$.

Chứng minh. Gọi q là một ước nguyên tố chung của x và a_i . Khi đó $q > M$ và $q \mid a_i$. Đặt $a_i = q \cdot c$ với c là một số nguyên dương. Vì $M \cdot c \in V$ và $M \cdot c < q \cdot c = a_i$ nên nếu $M \cdot c > a_{i-1}$ thì $M \cdot c$ sẽ là một ứng viên hợp lệ nhỏ hơn a_i , điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của a_i . Do đó ta bắt buộc phải có $M \cdot c \leq a_{i-1}$. Kết hợp với $a_i - a_{i-1} \leq M$, ta thu được $c(q - M) \leq M$. Từ đây ta có $c \leq M$, suy ra

$$a_i = q \cdot c = (q - M)c + M \cdot c \leq M + M^2 = M(M + 1).$$

Khẳng định được chứng minh. $\square$

Đặt $B = M(M + 1)$. Gọi P^* là tập gồm tất cả các số nguyên tố không vượt quá M và tất cả các ước nguyên tố của các số hạng $\leq B$ của dãy.

Khẳng định 3. Với mọi phần tử $x \in V$ và mọi số hạng $a_i \in A$, x và a_i luôn có ít nhất một ước nguyên tố chung thuộc P^* .

Chứng minh. Xét một $x \in V$ và một a_i . Nếu $a_i \leq B$ thì vì $\gcd(x, a_i) > 1$ ta có x và a_i có một ước nguyên tố chung p . Do $p \mid a_i$ và $a_i \leq B$, theo định nghĩa thì $p \in P^*$. Nếu $a_i > B$, giả sử ngược lại x và a_i không có ước nguyên tố chung nào nhỏ hơn hoặc bằng M . Theo chứng minh ở trên, khi đó $a_i \leq B$. Điều này mâu thuẫn với điều kiện $a_i > B$. Như vậy x và a_i bắt buộc phải chia sẻ ít nhất một ước nguyên tố $p \leq M$. Theo định nghĩa tập hợp P^* , ta có ngay $p \in P^*$. $\square$

Đặt $L = \prod_{p \in P^*} p$.

Khẳng định 4. Với mọi số nguyên dương x , ta có $x \in V$ nếu và chỉ nếu $x + L \in V$.

Chứng minh. Giả sử $x \in V$. Với mỗi số hạng $a_i \in A$, theo Khẳng định 3 thì x và a_i chia sẻ một ước nguyên tố $p \in P^*$. Do $p \in P^*$, ta có $p \mid L$, suy ra $p \mid (x + L)$. Khi đó $x + L$ và a_i cũng có chung ước nguyên tố p . Điều này đúng với mọi $a_i \in A$ nên $x + L \in V$. Ngược lại, nếu $x + L \in V$, bằng lập luận hoàn toàn tương tự, $x + L$ và a_i có chung một ước nguyên tố $p \in P^*$. Vì $p \mid L$, ta suy ra $p \mid x$, kéo theo x và a_i có chung ước p . Do đó $x \in V$. $\square$

Bây giờ viết $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ với $v_1 < v_2 < v_3 < \dots$. Đặt T là số lượng các phần tử của V nằm trong nửa khoảng $(0, L]$. Vì L chia hết cho mọi nguyên tố $p \in P^*$, và mỗi số hạng a_i đều có ít nhất một ước nguyên tố thuộc P^* , suy ra $\gcd(L, a_i) > 1$ với mọi $i \geq 1$. Nghĩa là $L \in V$, kéo theo $T \geq 1$.

Từ Khẳng định 4, ta có mỗi nửa khoảng có độ dài L trên trục số luôn chứa đúng T phần tử của V . Vì vậy ta có $v_{j+T} = v_j + L$ với mọi số nguyên dương j . Mặt khác, theo Khẳng định 1, tập A thu được bằng cách bỏ đi một số hữu hạn các phần tử của V nhỏ hơn a_1 . Giả sử có đúng $r - 1$ phần tử của V nhỏ hơn a_1 , khi đó $a_n = v_{n+r-1}$ với mọi số nguyên dương n . Suy ra

$$a_{n+T} = v_{n+T+r-1} = v_{n+r-1} + L = a_n + L$$

với mọi số nguyên dương n . $\square$

T's Lab

Trên AoPS, hai thành viên ZVFrozel và YaoAOPS bình luận rằng bài toán này có quan hệ rất thân thiết với bài toán N5 trong [1]. Đây là một lời giải nếu bạn nghiên cứu kỹ bộ đó!

Lời giải 2. Đặt $k = a_1$. Ta chia tất cả các số nguyên $\geq k$ thành hai tập hợp G và B : Một số $n \geq k$ thuộc tập G nếu và chỉ nếu với mọi $m \in G$ thỏa mãn $m < n$, ta đều có $\gcd(m, n) > 1$. Tập B gồm các số nguyên $\geq k$ không thuộc G . Khi đó dãy $(a_n)_{n=1}^\infty$ chính là dãy tất cả các phần tử của G theo thứ tự tăng.

Gọi một số nguyên tố p là *nhỏ* nếu $p \leq k$, và *lớn* nếu $p > k$. Hai số nguyên $\geq k$ được gọi là *tương đương* nếu tập hợp các ước nguyên tố nhỏ của chúng bằng nhau.

Khẳng định 1. Cho số nguyên $b \geq k$ có ít nhất một ước nguyên tố nhỏ. Khi đó tồn tại số nguyên x sao cho $k \leq x \leq b$, x tương đương với b , và x không có ước nguyên tố lớn nào.

Chứng minh. Nếu b không có ước nguyên tố lớn, ta chỉ cần chọn $x = b$. Ngược lại, giả sử b có một ước nguyên tố nhỏ p và một ước nguyên tố lớn q . Gọi a là tích của tất cả các ước nguyên tố phân biệt nhỏ của b . Xét số nguyên không âm m nhỏ nhất sao cho $x = p^m a \geq k$. Rõ ràng tập các ước nguyên tố của x bằng tập các ước nguyên tố của a . Vì vậy, x tương đương với b và chỉ gồm các ước nguyên tố nhỏ. Ta sẽ chứng minh $x \leq b$.

Nếu $m = 0$, ta có $x = a \leq b/q < b$. Nếu $m > 0$, do tính nhỏ nhất của m , ta có $p^{m-1}a < k$. Do đó $x = p(p^{m-1}a) < pk$. Vì $p \leq a$ (do $p \mid a$) và $k < q$, ta thu được $x < pk \leq ak < aq$. Mà a là tích các ước nguyên tố nhỏ phân biệt của b , còn q là một ước nguyên tố lớn của b , nên $aq \mid b$, dẫn đến $aq \leq b$. Suy ra $x \leq b$. $\square$

Khẳng định 2. Nếu hai số tương đương nhau thì chúng cùng thuộc G hoặc cùng thuộc B .

Chứng minh. Giả sử tồn tại một cặp số tương đương (a, b) sao cho $a \in B$ và $b \in G$. Ta chọn một cặp như vậy sao cho $\max(a, b)$ nhỏ nhất.

Vì $a \in B$, theo định nghĩa tồn tại một phần tử $r \in G$ sao cho $r < a$ và $\gcd(a, r) = 1$. Vì $k \in G$ là phần tử nhỏ nhất của G , và $r \in G$ với $r \geq k$, nếu $r > k$ thì theo định nghĩa của G , ta có $\gcd(k, r) > 1$; còn nếu $r = k$ thì hiển nhiên r có một ước nguyên tố $\leq k$. Do đó r luôn có ít nhất một ước nguyên tố nhỏ.

Áp dụng Khẳng định 1 cho r , ta thấy tồn tại số nguyên r' tương đương với r thỏa mãn $k \leq r' \leq r$, và r' chỉ chứa các ước nguyên tố nhỏ. Vì $r \in G$ và $\max(r, r') = r < a \leq \max(a, b)$, tính nhỏ nhất bảo đảm rằng r' cũng phải cùng trạng thái với r , nghĩa là $r' \in G$.

Bây giờ, vì $r' \in G$ và $b \in G$, chúng không thể nguyên tố cùng nhau, do đó tồn tại một ước nguyên tố chung p của r' và b . Vì r' chỉ chứa toàn các ước nguyên tố nhỏ, nên p bắt buộc phải là một số nguyên tố nhỏ. Do $p \mid b$ và p nhỏ, tính tương đương giữa a và b suy ra $p \mid a$. Mặt khác, do $p \mid r'$ và p nhỏ, tính tương đương giữa r và r' suy ra $p \mid r$. Từ đó ta có $p \mid \gcd(a, r)$, dẫn tới $\gcd(a, r) \geq p > 1$. Điều này mâu thuẫn trực tiếp với việc $\gcd(a, r) = 1$. $\square$

Trở lại bài toán. Gọi P là tích của tất cả các số nguyên tố nhỏ. Với mọi $n, m \geq k$, nếu $n - m$ chia hết cho P thì n và m tương đương. Theo Khẳng định 2, ta có $n \in G \iff m \in G$. Nói riêng, với mọi $n \geq k$, ta có

$$n \in G \iff n + P \in G.$$

Vì vậy nếu $x \geq k$, các đoạn có độ dài P nối tiếp nhau dạng

$$[x, x + P - 1], [x + P, x + 2P - 1], \dots$$

luôn chứa cùng một số lượng phần tử của G . Gọi số lượng không đổi này là T . Hiển nhiên $T \geq 1$ do đoạn $[k, k + P - 1]$ chứa phần tử $k \in G$.

Xét phần tử $a_n \in G$. Đoạn $[a_n, a_n + P - 1]$ chứa đúng T phần tử của G . Vì phần tử đầu tiên của đoạn này là a_n , nên các phần tử của G trong đoạn lần lượt là $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+T-1}$. Do tính tuần hoàn modulo P , đoạn kế tiếp $[a_n + P, a_n + 2P - 1]$ có các phần tử thuộc G bằng các phần tử của đoạn trước cộng thêm P , cụ thể là

$$a_n + P, a_{n+1} + P, \dots, a_{n+T-1} + P.$$

Do đó phần tử đầu tiên của đoạn kế tiếp chính là $a_n + P$. Phần tử này nối tiếp ngay sau phần tử cuối cùng của đoạn trước (a_{n+T-1}), tức là nó có chỉ số $n + T$, suy ra $a_{n+T} = a_n + P$ với mọi $n \geq 1$.

Cuối cùng chọn $L = P$ ta thu được điều phải chứng minh. $\square$

T's Lab

Tài liệu tham khảo

- [1] IMO 2013 Shortlist.
- [2] AoPS. *IMO 2026, Problem 6*. <https://artofproblemsolving.com/community/p38677077>

T's Lab