

USAMO 2009/6. Cho $(s_n)_{n \geq 1}$ là một dãy không hằng các số hữu tỉ. Giả sử $(t_n)_{n \geq 1}$ cũng là một dãy không hằng các số hữu tỉ thỏa mãn tính chất $(s_i - s_j)(t_i - t_j)$ là một số nguyên với mọi i và j . Chứng minh rằng tồn tại một số hữu tỉ r khác 0 sao cho $(s_i - s_j)r$ và $(t_i - t_j)/r$ là các số nguyên với mọi i và j .

T's Lab

Lời giải 1. Đặt $S_i = s_i - s_1$ và $T_i = t_i - t_1$ với mọi $i \geq 1$. Khi đó $S_1 = T_1 = 0$.

Bài toán yêu cầu tìm số hữu tỉ r sao cho $(s_i - s_j)r \in \mathbb{Z}$ và $\frac{t_i - t_j}{r} \in \mathbb{Z}$. Nếu ta tìm được $r \in \mathbb{Q}^*$ sao cho $S_i r \in \mathbb{Z}$ và $\frac{T_i}{r} \in \mathbb{Z}$ với mọi i , thì với mọi cặp i, j , ta cũng có

$$(s_i - s_j)r = (S_i - S_j)r = S_i r - S_j r \in \mathbb{Z}$$

và

$$\frac{t_i - t_j}{r} = \frac{T_i - T_j}{r} = \frac{T_i}{r} - \frac{T_j}{r} \in \mathbb{Z}.$$

Vậy ta chỉ cần tập trung vào việc tìm r cho các dãy S_i và T_i .

Từ giả thiết $(s_i - s_j)(t_i - t_j) \in \mathbb{Z}$, ta suy ra $(S_i - S_j)(T_i - T_j) \in \mathbb{Z}$ với mọi cách chọn hai chỉ số i và j .

Chọn $j = 1$ và để ý $S_1 = T_1 = 0$, ta có $S_i T_i \in \mathbb{Z}$ với mọi i . (1)

Vì $(S_i - S_j)(T_i - T_j)$ là số nguyên với mọi i và j nên kết hợp với (1) ta có

$$S_i T_j + S_j T_i \in \mathbb{Z}, \quad \forall i, j. \quad (2)$$

Do dãy $(s_n)_{n \geq 1}$ và $(t_n)_{n \geq 1}$ không phải là dãy hằng, tồn tại các phần tử khác 0 trong dãy $(S_n)_{n \geq 1}$ và $(T_n)_{n \geq 1}$.

Trường hợp 1: Tồn tại chỉ số a sao cho $S_a \neq 0$ và $T_a \neq 0$.

Từ (1) và (2), với mọi i , các số $N := S_a T_a$, $M_i := S_i T_i$ và $Z_i := S_i T_a + S_a T_i$ đều là các số nguyên. Với một chỉ số i , xét phương trình bậc hai (ẩn X):

$$NX^2 - Z_i X + M_i = 0.$$

Vì $X_i := \frac{S_i}{S_a}$ là một nghiệm hữu tỉ của phương trình này nên theo định lý nghiệm hữu tỉ, mẫu số của nghiệm hữu tỉ X_i (khi viết ở dạng phân số tối giản) phải là ước của N . Do đó $N X_i \in \mathbb{Z}$, tức là

$$(S_a T_a) \frac{S_i}{S_a} = T_a S_i \in \mathbb{Z}, \quad \forall i.$$

Đổi vai trò của S và T , hoàn toàn tương tự ta cũng có $S_a T_i \in \mathbb{Z}$ với mọi i .

Trường hợp 2: Không tồn tại a để $S_a \neq 0$ và $T_a \neq 0$.

Điều này nghĩa là với mọi i , hoặc $S_i = 0$ hoặc $T_i = 0$. Vì dãy $(S_n)_{n \geq 1}$ không hằng nên tồn tại chỉ số u sao cho $S_u \neq 0$, và do giả thiết của trường hợp 2, ta phải có $T_u = 0$. Vì dãy $(T_n)_{n \geq 1}$ không hằng nên tồn tại chỉ số v sao cho $T_v \neq 0$, và tương tự ta phải có $S_v = 0$. Áp dụng (2) ta có $S_i T_v$ và $S_u T_i$ là các số nguyên với mọi i .

Trong cả hai trường hợp, luôn tồn tại các hằng số hữu tỉ khác 0, gọi là T^* và S^* , sao cho $T^* S_i$ và $S^* T_i$ là các số nguyên với mọi i . Điều này chứng tỏ tập hợp tất cả các phần tử S_i là một tập con của nhóm cộng $\frac{1}{T^*} \mathbb{Z}$, và các phần tử T_i thuộc nhóm cộng $\frac{1}{S^*} \mathbb{Z}$.

Xét nhóm $G_S := \langle S_1, S_2, \dots \rangle_{\mathbb{Z}}$. Vì S không phải dãy hằng toàn 0, nhóm G_S sinh bởi một số hữu tỉ dương duy nhất, gọi là q_1 . Nghĩa là $G_S = q_1 \mathbb{Z}$. Hoàn toàn tương tự, nhóm $G_T := \langle T_1, T_2, \dots \rangle_{\mathbb{Z}}$ có dạng $G_T = q_2 \mathbb{Z}$ với $q_2 \in \mathbb{Q}^+$.

Vì q_1, q_2 là các phần tử sinh dương, ta có thể viết: $S_i = m_i q_1$ và $T_i = n_i q_2$ với $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$. Ta cũng có ngay $\gcd\{m_i\} = \gcd\{n_i\} = 1$. Từ (1) và (2), với $K := q_1 q_2 \in \mathbb{Q}^+$, ta có $K m_i n_i$ và $K(m_i n_j + m_j n_i)$ là các số nguyên với mọi i và j .

Ta sẽ chứng minh K là một số nguyên. Giả sử ngược lại rằng $K = \frac{A}{B}$ với A, B là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau và $B > 1$. Gọi p là một ước nguyên tố của B . Khi đó $m_i n_i \equiv 0 \pmod{p}$ với mọi i và $m_i n_j + m_j n_i \equiv 0 \pmod{p}$ với mọi i, j .

Vì $\gcd(\{m_i\}) = 1$, tồn tại chỉ số u sao cho $m_u \not\equiv 0 \pmod{p}$. Do $m_u n_u \equiv 0 \pmod{p}$, ta bắt buộc phải có $n_u \equiv 0 \pmod{p}$. Tương tự, vì $\gcd(\{n_i\}) = 1$, tồn tại chỉ số v sao cho $n_v \not\equiv 0 \pmod{p}$. Do $m_v n_v \equiv 0 \pmod{p}$, ta suy ra $m_v \equiv 0 \pmod{p}$. Vì

$$m_u n_v + m_v n_u \equiv 0 \pmod{p}$$

nên $m_u n_v \equiv 0 \pmod{p}$. Nhưng điều này mâu thuẫn vì ta đã chọn u, v sao cho $p \nmid m_u$ và $p \nmid n_v$.

Vậy K là số nguyên.

Bây giờ chỉ cần chọn $r = \frac{1}{q!}$ là xong. □

T's Lab

Lời giải 2. Ta có ba nhận xét sau:

- 1) Nếu $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ là một song ánh thì hai dãy $(s_{\sigma(n)})_{n \geq 1}$ và $(t_{\sigma(n)})_{n \geq 1}$ cũng thỏa mãn các giả thiết của bài toán.
- 2) Nếu s, t là các số hữu tỉ thì hai dãy $(s_n + s)_{n \geq 1}$ và $(t_n + t)_{n \geq 1}$ cũng thỏa mãn các giả thiết của bài toán.
- 3) Tồn tại cặp chỉ số (i, j) sao cho $(s_i - s_j)(t_i - t_j) \neq 0$.

Chứng minh nhận xét 3: Do dãy (s_i) không phải dãy hằng nên tồn tại (i, j) sao cho $s_i \neq s_j$. Nếu $t_i \neq t_j$ thì (i, j) là cặp phải tìm. Nếu $t_i = t_j$, do dãy t không hằng, ta chọn k sao cho $t_k \neq t_i$. Khi $s_k = s_i$, ta chọn (j, k) (vì khi đó $s_j \neq s_k$ và $t_j \neq t_k$). Khi $s_k \neq s_i$, ta chọn (k, i) .

Trở lại bài toán. Bởi các nhận xét trên, ta có thể giả sử $s_1 = t_1 = 0$, $s_2 \neq 0$ và $t_2 \neq 0$.

Ta sẽ chứng minh tồn tại các số hữu tỉ dương A, B sao cho AB , As_j và Bt_j đều là các số nguyên với mọi j . Với mọi i, j , ta có $(s_i - s_1)(t_i - t_1) = s_i t_i$ và

$$(s_i - s_j)(t_i - t_j) = s_i t_i + s_j t_j - (s_i t_j + s_j t_i).$$

Từ giả thiết bài toán, suy ra $s_i t_i$ và $s_i t_j + s_j t_i$ là các số nguyên với mọi i, j . Cố định $i = 2$, ta có $s_2 t_2$, $s_j t_j$ và $s_2 t_j + s_j t_2$ là các số nguyên. Xét phương trình bậc hai nhận $s_j t_2$ và $s_2 t_j$ làm nghiệm:

$$X^2 - (s_2 t_j + s_j t_2)X + (s_2 t_2)(s_j t_j) = 0.$$

Phương trình này có các hệ số là số nguyên và hệ số bậc cao nhất bằng 1. Do đó, theo định lý nghiệm hữu tỉ, các nghiệm của nó phải là số nguyên. Suy ra $s_j t_2 \in \mathbb{Z}$ với mọi j .

Giả sử $t_2 = \frac{u_2}{v_2}$ ở dạng phân số tối giản. Từ $s_j \frac{u_2}{v_2} \in \mathbb{Z}$, ta có $s_j u_2 \in \mathbb{Z}$. Chọn $A = |u_2| > 0$, ta có A là số nguyên dương và As_j là số nguyên với mọi j . Hoàn toàn tương tự (bằng cách xét nghiệm còn lại $s_2 t_j \in \mathbb{Z}$), giả sử $s_2 = \frac{p_2}{q_2}$, ta chọn $B = |p_2| > 0$, suy ra Bt_j là số nguyên với mọi j .

Vì A, B vừa tìm được là các số nguyên dương, tích AB cũng là số nguyên dương. Do đó, tập hợp các cặp số hữu tỉ dương (A, B) sao cho $As_j \in \mathbb{Z}$, $Bt_j \in \mathbb{Z}$ và $AB \in \mathbb{Z}$ là một tập khác rỗng.

Xét tập hợp các cặp (A, B) hữu tỉ dương thỏa mãn điều kiện trên. Vì các giá trị của AB là các số nguyên dương nên tồn tại cặp (A, B) sao cho tích AB đạt giá trị nhỏ nhất. Ta sẽ chứng minh $AB = 1$.

Thật vậy, giả sử $AB > 1$, khi đó số nguyên dương AB có ít nhất một ước nguyên tố p . Với mọi j , ta có

$$AB(s_j t_j) = (As_j)(Bt_j)$$

Vì $s_j t_j \in \mathbb{Z}$ và $p \mid AB$, vế trái chia hết cho p . Do (As_j) và (Bt_j) đều là các số nguyên, p phải chia hết As_j hoặc Bt_j . Xét các trường hợp:

Trường hợp 1: p chia hết As_j với mọi j .

Ta xét cặp số hữu tỉ dương mới là $(A/p, B)$. Rõ ràng $\frac{A}{p} s_j = \frac{As_j}{p}$ là số nguyên với mọi j , và Bt_j vẫn là số nguyên với mọi j . Hơn nữa, tích của chúng là $\frac{A}{p} \cdot B = \frac{AB}{p}$ là một số nguyên dương (vì $p \mid AB$). Tuy nhiên, $\frac{AB}{p} < AB$, điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của AB . Tương tự, nếu p chia hết Bt_j với mọi j , ta xét cặp $(A, B/p)$ và cũng thu được mâu thuẫn.

Trường hợp 2: Tồn tại j để p không chia hết As_j , và tồn tại i để p không chia hết Bt_i .

Từ phân tích trên, vì p không chia hết As_j nên bắt buộc p chia hết Bt_j . Tương tự, vì p không chia hết Bt_i nên bắt buộc p chia hết As_i . Xét đẳng thức

$$AB(s_i t_j + s_j t_i) = (As_i)(Bt_j) + (As_j)(Bt_i)$$

Vì $s_it_j + s_jt_i \in \mathbb{Z}$ và $p \mid AB$, vế trái chia hết cho p . Ở vế phải, số hạng thứ nhất $(As_i)(Bt_j)$ chia hết cho p^2 (do $p \mid As_i$ và $p \mid Bt_j$). Do đó, số hạng thứ hai $(As_j)(Bt_i)$ cũng phải chia hết cho p . Tuy nhiên, theo cách chọn, p không chia hết As_j và p không chia hết Bt_i . Do p là số nguyên tố, tích $(As_j)(Bt_i)$ không thể chia hết cho p , đây là một mâu thuẫn.

Vậy điều giả sử $AB > 1$ là sai. Ta bắt buộc phải có $AB = 1$.

Từ đây ta chỉ cần chọn $r = A$ là xong. □

T's Lab

Dưới đây là lời giải của Paul Christiano, huy chương Bạc tại IMO 2008.

Lời giải 3. Ta cho các số hữu tỉ trong lời giải này đều ở dạng phân số tối giản. Lập luận tương tự như các lời giải trước để luôn có thể coi $s_2 \neq s_1$ và $t_2 \neq t_1$. Đặt $d = s_2 - s_1 \neq 0$. Với mỗi i , đặt

$$s'_i = \frac{s_i - s_1}{d}, \quad t'_i = (t_i - t_1)d.$$

Phép biến đổi này bảo toàn tích $(s'_i - s'_j)(t'_i - t'_j) = (s_i - s_j)(t_i - t_j)$. Sau phép biến đổi, ta có thể giả sử dãy mới có $s'_1 = t'_1 = 0$, $s'_2 = 1$ và $t'_2 = k \neq 0$. Vì $s'_2 t'_2 \in \mathbb{Z}$ nên k là một số nguyên. Để thuận tiện cho việc trình bày, ta tạm thời bỏ dấu phẩy và gọi hai dãy đang xét là (s_n) và (t_n) .

Với mọi i , ta có

$$(s_i - 1)(t_i - k) = s_i t_i - k s_i - t_i + k \in \mathbb{Z}.$$

Mặt khác $s_i t_i = (s_i - 0)(t_i - 0) \in \mathbb{Z}$ và $k \in \mathbb{Z}$, do đó $t_i + k s_i \in \mathbb{Z}$. (1)

Giả sử $s_i = \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Từ $s_i t_i \in \mathbb{Z}$, ta suy ra $b \mid a t_i$. Vì $\gcd(a, b) = 1$, ta bắt buộc phải có $b \mid t_i$. Do đó $t_i = b c$ với $c \in \mathbb{Z}$. Thay vào (1), ta có

$$b c + \frac{k a}{b} \in \mathbb{Z}.$$

Từ đây suy ra $\frac{k a}{b} \in \mathbb{Z}$, tức là $b \mid k a$. Lại áp dụng $\gcd(a, b) = 1$, ta thu được $b \mid k$. Vì $b \mid k$, số $k s_i = k \frac{a}{b}$ là một số nguyên. Kết hợp điều này với (1), ta có $t_i \in \mathbb{Z}$. Vậy dãy (t_i) chỉ gồm toàn các số nguyên.

Bây giờ gọi $g = \gcd(t_1, t_2, \dots)$ là ước chung lớn nhất của tất cả các phần tử trong dãy t . Với mỗi i , đặt

$$s''_i = g s_i, \quad t''_i = \frac{t_i}{g}.$$

Phép biến đổi này tiếp tục bảo toàn tích $(s''_i - s''_j)(t''_i - t''_j)$. Lúc này, dãy (t''_i) vẫn gồm toàn các số nguyên và thỏa mãn $\gcd(t''_1, t''_2, \dots) = 1$.

Ta sẽ chứng minh $s''_i \in \mathbb{Z}$ với mọi số nguyên dương i . Tương tự như trước, ta lại tạm gọi dãy mới này là (s_i) và (t_i) cho dễ đọc.

Giả sử tồn tại chỉ số i sao cho s_i không phải là số nguyên. Khi đó, mẫu số của s_i (ở dạng tối giản) sẽ có ít nhất một ước nguyên tố p . Vì $\gcd(t_n) = 1$, tồn tại chỉ số j thỏa mãn $p \nmid t_j$.

Từ $s_i t_i \in \mathbb{Z}$, mẫu số của s_i phải là ước của t_i , suy ra $p \mid t_i$. Do $p \mid t_i$ và $p \nmid t_j$, ta có $p \nmid (t_i - t_j)$.

Mặt khác, từ $s_j t_j \in \mathbb{Z}$ và $p \nmid t_j$, ta suy ra p không thể là ước của mẫu số của s_j . Vì mẫu số của s_i chia hết cho p trong khi mẫu số của s_j không chia hết cho p , hiệu $s_i - s_j$ khi viết dưới dạng phân số tối giản sẽ có mẫu số chia hết cho p .

Kết hợp lại, trong tích $(s_i - s_j)(t_i - t_j)$, thừa số thứ nhất có mẫu chứa p , trong khi thừa số thứ hai là một số nguyên không chia hết cho p . Do đó, tích này là một phân số có mẫu số chia hết cho p , nên không thể là một số nguyên. Điều này mâu thuẫn trực tiếp với giả thiết bài toán.

Mâu thuẫn trên chứng tỏ hai dãy thu được sau hai lần chuẩn hóa đều là các dãy số nguyên.

Bây giờ chỉ cần chọn $r = g/d$ là xong. □

Dưới đây là lời giải của jmerly trên AoPS.

Lời giải 4. Để thuận tiện, ta coi hai dãy bắt đầu từ chỉ số 0 thay vì 1. Không mất tính tổng quát ta giả sử $s_0 = t_0 = 0$. Cho $j = 0$ trong giả thiết, ta có $s_i t_i$ là số nguyên với mọi i . Cho $i \neq j$, ta có số

$$s_i t_i + s_j t_j - (s_i - s_j)(t_i - t_j) = s_i t_j + s_j t_i$$

cũng là một số nguyên. Bởi vậy, với mọi số tự nhiên n và k , ta có số

$$\sum_{\substack{i,j \leq n \\ i+j=k}} s_i t_j$$

luôn là một số nguyên.

Xét hai đa thức $S_n(x) = s_1 x + s_2 x^2 + \cdots + s_n x^n$ và

$$T_n(x) = t_1 x + t_2 x^2 + \cdots + t_n x^n.$$

Đa thức $\Gamma_n(x) = S_n(x)T_n(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên.

Chọn n đủ lớn sao cho cả hai đa thức $S_n(x)$ và $T_n(x)$ đều khác đa thức không. Gọi d_n là ước chung lớn nhất của các hệ số của đa thức $\Gamma_n(x)$. Theo Bổ đề Gauss, ta có thể phân tích đa thức này thành

$$\Gamma_n(x) = (r_n s_1 x + \cdots + r_n s_n x^n) \left(\frac{t_1}{d_n r_n} x + \cdots + \frac{t_n}{d_n r_n} x^n \right) d_n,$$

trong đó r_n là hằng số hữu tỉ dương thỏa mãn đa thức thứ nhất $(r_n s_1 x + \cdots + r_n s_n x^n)$ là đa thức nguyên bản. Khi đó đa thức thứ hai

$$\left(\frac{t_1}{d_n r_n} x + \cdots + \frac{t_n}{d_n r_n} x^n \right)$$

cũng buộc phải là đa thức nguyên bản.

Xét hai số nguyên dương $m > n$ đủ lớn. Ta sẽ chứng minh $\frac{r_m}{r_n}$ là một số nguyên. Thật vậy, các hệ số $r_m s_1, \dots, r_m s_m$ là các số nguyên nên tập con $r_m s_1, \dots, r_m s_n$ cũng là các số nguyên. Giả sử $\frac{r_m}{r_n}$ không phải là số nguyên, khi đó phân số tối giản của nó sẽ có một số nguyên tố p chia hết mẫu số nhưng không chia hết tử số. Vì $r_m s_i = \left(\frac{r_m}{r_n} \right) r_n s_i$ là số nguyên, p phải là ước của tất cả các hệ số $r_n s_1, \dots, r_n s_n$. Nhưng đa thức

$$(r_n s_1 x + \cdots + r_n s_n x^n)$$

là nguyên bản nên điều này là không thể.

Vậy $\frac{r_m}{r_n}$ là một số nguyên, suy ra $r_m \geq r_n$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự cho đa thức nguyên bản thứ hai, ta có $\frac{d_n r_n}{d_m r_m}$ cũng phải là một số nguyên dương.

Từ $\frac{r_m}{r_n} \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{d_n r_n}{d_m r_m} \in \mathbb{Z}^+$, ta có

$$\frac{d_n}{d_m} = \left(\frac{d_n r_n}{d_m r_m} \right) \cdot \left(\frac{r_m}{r_n} \right) \in \mathbb{Z}^+.$$

Suy ra d_n chia hết cho d_m , và do đó $d_n \geq d_m$.

Như vậy dãy (d_n) là một dãy gồm toàn các số nguyên dương và không tăng. Do đó tồn tại một chỉ số N đủ lớn sao cho $d_m = d_N$ với mọi $m \geq N$. Khi $d_m = d_n$, tỉ số $\frac{d_n}{d_m} = 1$. Suy ra $\frac{r_m}{r_n} = 1$, tức là $r_m = r_n = r_N$ với mọi $m \geq N$.

Dãy hệ số r_n đã trở thành hằng số kể từ N . Ta chọn $r = r_N$. Vì $rS_m(x)$ là đa thức thuộc $\mathbb{Z}[x]$ với mọi m lớn tùy ý, ta có $rs_i \in \mathbb{Z}$ với mọi i . Vì $\frac{1}{d_N r} T_m(x)$ thuộc $\mathbb{Z}[x]$ và $d_N \in \mathbb{Z}$, ta cũng có $\frac{t_i}{r} \in \mathbb{Z}$ với mọi i . Kết hợp với $s_0 = t_0 = 0$, ta thu được $(s_i - s_j)r \in \mathbb{Z}$ và $\frac{t_i - t_j}{r} \in \mathbb{Z}$ với mọi i, j . $\square$

T's Lab

Sau đây là lời giải của Hamster1800 và The QuattoMaster 6000 trên AoPS.

Lời giải 5. Từ giả thiết bài toán $(s_i - s_j)(t_i - t_j) \in \mathbb{Z}$, ta có $v_p(s_i - s_j) + v_p(t_i - t_j) \geq 0$ với mọi i, j . Ta phải tìm $r \in \mathbb{Q}$ sao cho $v_p(r) \geq -v_p(s_i - s_j)$ và $v_p(r) \leq v_p(t_i - t_j)$, với mọi số nguyên tố p và mọi chỉ số i, j .

Cố định một số nguyên tố p . Xét hai số khác nhau t_x và t_y . Lấy số nguyên d thỏa mãn $v_p(t_x - t_y) < d$, khi đó với mọi i thì $v_p(t_i - t_x) < d$ hoặc $v_p(t_i - t_y) < d$. Từ $v_p(s_i - s_x) + v_p(t_i - t_x) \geq 0$, ta suy ra với mọi i thì $v_p(s_i - s_x) > -d$ hoặc $v_p(s_i - s_y) > -d$. Do đó dãy $(v_p(s_i))$ bị chặn dưới, và bởi thế, tập hợp $\{v_p(s_i - s_j)\}$ bị chặn dưới. Nhưng tập này gồm các số nguyên nên nó có phần tử nhỏ nhất, ta ký hiệu phần tử nhỏ nhất này bởi δ_p . Chứng minh tương tự, ta cũng thấy tồn tại $\delta'_p = \min\{v_p(t_i - t_j)\}$.

Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại cặp chỉ số (i, j) sao cho $\delta_p = v_p(s_i - s_j)$ và $\delta'_p = v_p(t_i - t_j)$ đạt được đồng thời. Khi đó ta có $\delta_p + \delta'_p \geq 0$, suy ra $-\delta_p \leq \delta'_p$ và ta có thể tìm được $v_p(r)$ để với mọi i, j , ta có:

$$-v_p(s_i - s_j) \leq -\delta_p \leq v_p(r) \leq \delta'_p \leq v_p(t_i - t_j).$$

Giả sử ngược lại, không có cặp nào đạt giá trị nhỏ nhất đồng thời cho cả hai dãy. Lấy các chỉ số i, j, k, l thỏa mãn $v_p(s_i - s_j) = \delta_p$ và $v_p(t_k - t_l) = \delta'_p$.

Trường hợp 1: $v_p(s_i - s_k) > \delta_p$ và $v_p(s_l - s_j) > \delta_p$.

Ta có $v_p(s_k - s_l) = v_p((s_k - s_i) + (s_i - s_j) + (s_j - s_l)) = v_p(s_i - s_j) = \delta_p$. Điều này dẫn tới cặp (k, l) vừa đạt δ_p vừa đạt δ'_p , mâu thuẫn với giả thiết phản chứng.

Trường hợp 2: $v_p(s_i - s_k) > \delta_p$ và $v_p(s_l - s_j) = \delta_p$.

Vì cặp (l, j) đã đạt δ_p nên nó không thể đạt δ'_p , tức là $v_p(t_l - t_j) > \delta'_p$. Suy ra

$$v_p(s_k - s_j) = v_p((s_k - s_i) + (s_i - s_j)) = v_p(s_i - s_j) = \delta_p$$

và

$$v_p(t_k - t_j) = v_p((t_k - t_l) + (t_l - t_j)) = v_p(t_k - t_l) = \delta'_p.$$

Điều này dẫn tới cặp (k, j) đạt giá trị nhỏ nhất cho cả hai dãy, mâu thuẫn.

Trường hợp 3: $v_p(s_i - s_k) = \delta_p$ và $v_p(s_l - s_j) > \delta_p$.

Vì cặp (i, k) đã đạt δ_p nên $v_p(t_i - t_k) > \delta'_p$. Suy ra

$$v_p(s_i - s_l) = v_p((s_i - s_j) + (s_j - s_l)) = v_p(s_i - s_j) = \delta_p$$

và

$$v_p(t_i - t_l) = v_p((t_i - t_k) + (t_k - t_l)) = v_p(t_k - t_l) = \delta'_p.$$

Điều này dẫn tới cặp (i, l) thỏa mãn, mâu thuẫn.

Trường hợp 4: $v_p(s_i - s_k) = \delta_p$ và $v_p(s_l - s_j) = \delta_p$. Ta có $v_p(t_i - t_k) > \delta'_p$ và $v_p(t_l - t_j) > \delta'_p$. Suy ra

$$v_p(t_i - t_j) = v_p((t_i - t_k) + (t_k - t_l) + (t_l - t_j)) = \delta'_p.$$

Tuy nhiên ta đã có $v_p(s_i - s_j) = \delta_p$. Điều này có nghĩa là cặp (i, j) đạt giá trị nhỏ nhất đồng thời, mâu thuẫn.

Vậy luôn tồn tại cặp chỉ số chung, và ta có thể chọn được số hữu tỉ hình thức

$$r = \pm \prod p^{v_p(r)}$$

thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chỉ ra có thể chọn $v_p(r)$ sao cho nó khác 0 chỉ với hữu hạn số nguyên tố p .

Xét hai cặp chỉ số (i, j) và (k, l) sao cho $s_i \neq s_j$ và $t_k \neq t_l$. Ta thấy tồn tại một tập hữu hạn Z gồm các số nguyên tố (là các ước nguyên tố của tử số và mẫu số của $s_i - s_j$ và $t_k - t_l$). Với các số nguyên tố p ở ngoài Z , ta có $v_p(s_i - s_j) = 0$ và $v_p(t_k - t_l) = 0$. Suy ra $\delta_p \leq 0$ và $\delta'_p \leq 0$. Mặt khác, như đã chứng minh, ta luôn có $\delta_p + \delta'_p \geq 0$. Do đó bắt buộc $\delta_p = \delta'_p = 0$. Với các số nguyên tố $p \notin Z$ này, ta chọn $v_p(r) = 0$. Vì chỉ có hữu hạn các số nguyên tố $p \in Z$ nhận giá trị $v_p(r) \neq 0$, số r cấu thành chính là một số hữu tỉ thực sự. Bài toán được chứng minh hoàn toàn. $\square$

T's Lab

Dưới đây là lời giải chính thức của ban tổ chức USAMO 2009.

Lời giải 6. Như các lời giải trước, ta coi $s_1 = t_1 = 0$ và $s_2 = 1$. Từ giả thiết, chọn $j = 1$, ta có $(s_n - s_1)(t_n - t_1) = s_n t_n \in \mathbb{Z}$ với mọi n . Với hai chỉ số a, b bất kỳ, từ $(s_a - s_b)(t_a - t_b) \in \mathbb{Z}$, ta được

$$s_a t_a + s_b t_b - (s_a t_b + s_b t_a) \in \mathbb{Z}.$$

Vì $s_a t_a \in \mathbb{Z}$ và $s_b t_b \in \mathbb{Z}$ nên tổng $s_a t_b + s_b t_a$ là một số nguyên. Mặt khác, tích $(s_a t_b)(s_b t_a) = (s_a t_a)(s_b t_b)$ cũng là số nguyên, do đó ta có $s_a t_b \in \mathbb{Z}$ với mọi cặp chỉ số a, b .

Chọn $a = 2$, vì $s_2 = 1$, ta thu được $s_2 t_b = t_b \in \mathbb{Z}$ với mọi b . Vậy dãy (t_n) chỉ gồm toàn các số nguyên.

Gọi $g = \gcd(t_1, t_2, \dots)$ là ước chung lớn nhất của tất cả các phần tử trong dãy t . Theo định lý Bézout, g có thể được biểu diễn dưới dạng một tổ hợp tuyến tính nguyên của hữu hạn các phần tử thuộc tập $\{t_n\}$. Giả sử

$$g = c_1 t_{n_1} + c_2 t_{n_2} + \dots + c_k t_{n_k}$$

với $c_i \in \mathbb{Z}$. Cố định một chỉ số a bất kỳ và nhân s_a vào hai vế, ta được

$$s_a g = c_1 (s_a t_{n_1}) + c_2 (s_a t_{n_2}) + \dots + c_k (s_a t_{n_k}).$$

Vì $s_a t_{n_i}$ là số nguyên với mọi n_i và $c_i \in \mathbb{Z}$, nên vế phải là một số nguyên. Từ đó suy ra $s_a g \in \mathbb{Z}$ với mọi a . Đồng thời, vì g là ước chung của mọi t_b , ta hiển nhiên có $\frac{t_b}{g} \in \mathbb{Z}$ với mọi b . $\square$

Cuối cùng là lời giải của Evan Chen.

Lời giải 7. Giả sử $s_1 = t_1 = 0$, $s_2 = 1$ và $t_2 = t \neq 0$. Từ giả thiết, cho $j = 1$, ta có $s_i t_i \in \mathbb{Z}$ với mọi i . Nói riêng với $i = 2$, ta có $s_2 t_2 = t \in \mathbb{Z}$. Vậy t là một số nguyên khác 0. Ngoài ra, khai triển $(s_i - s_j)(t_i - t_j) \in \mathbb{Z}$, ta cũng suy ra $s_i t_j + s_j t_i \in \mathbb{Z}$ với mọi i, j .

Xét s_n bất kỳ. Nếu $s_n = 0$, hiển nhiên $s_n \in \mathbb{Z}$. Nếu $s_n \neq 0$, ta biểu diễn $s_n = \frac{a}{b}$ dưới dạng phân số tối giản (với $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b > 0$, $\gcd(a, b) = 1$). Vì $s_n t_n \in \mathbb{Z}$, suy ra $\frac{at_n}{b} \in \mathbb{Z}$, do đó $b \mid at_n$. Vì $\gcd(a, b) = 1$, ta bắt buộc phải có $b \mid t_n$. Khi đó tồn tại số nguyên c sao cho $t_n = bc$. Ta có thể viết khéo léo lại thành $t_n = \frac{b}{a}(ac) = \frac{b}{a}u$ với $u = ac \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng tính chất $s_2 t_n + s_n t_2 \in \mathbb{Z}$ (với $s_2 = 1, t_2 = t$), ta có:

$$t_n + s_n t = \frac{b}{a}u + \frac{a}{b}t = \frac{b^2 u + a^2 t}{ab} \in \mathbb{Z}.$$

Từ đây suy ra mẫu số b phải là ước của tử số, tức là $b \mid (b^2 u + a^2 t)$. Điều này dẫn tới $b \mid a^2 t$. Lại do $\gcd(a, b) = 1$, ta thu được $b \mid t$. Vì t là một số nguyên cố định và khác 0, mọi mẫu số b của dãy s đều bị chặn bởi $|t|$.

Vì tập hợp các mẫu số của dãy s là hữu hạn và bị chặn, gọi L là bội chung nhỏ nhất của tất cả các mẫu số này. Ta thực hiện phép chuẩn hóa: nhân toàn bộ dãy s_n với L và chia toàn bộ dãy t_n cho L . Dãy s_n lúc này đã trở thành một dãy gồm toàn các số nguyên. Tiếp theo, gọi $g = \gcd(s_1, s_2, \dots)$ là ước chung lớn nhất của toàn bộ dãy s_n mới. Ta chia dãy s_n cho g và nhân dãy t_n với g . Lúc này, dãy s_n vẫn gồm toàn các số nguyên và thỏa mãn $\gcd(s_1, s_2, \dots) = 1$. Các điều kiện $s_n t_n \in \mathbb{Z}$ và $s_i t_j + s_j t_i \in \mathbb{Z}$ tiếp tục được bảo toàn.

Giả sử tồn tại chỉ số k sao cho $t_k = \frac{x}{y}$ không phải là số nguyên, với $\gcd(x, y) = 1$ và $y > 1$. Khi đó, tồn tại một số nguyên tố p sao cho $p \mid y$.

Từ $s_k t_k \in \mathbb{Z}$, mẫu số y phải là ước của tử số $s_k x$. Do $\gcd(x, y) = 1$, ta suy ra $y \mid s_k$, kéo theo $p \mid s_k$. Nghĩa là $v_p(s_k) \geq 1$. Mặt khác, vì ước chung lớn nhất của toàn bộ dãy s bằng 1, phải tồn tại một chỉ số ℓ sao cho $p \nmid s_\ell$. Nghĩa là $v_p(s_\ell) = 0$. Từ $s_\ell t_\ell \in \mathbb{Z}$, mẫu số của t_ℓ phải là ước của s_ℓ . Vì $p \nmid s_\ell$, mẫu số của t_ℓ không thể chia hết cho p . Do đó, $v_p(t_\ell) \geq 0$.

Xét cấp p -adic của tổng $X = s_\ell t_k + s_k t_\ell \in \mathbb{Z}$. Ta có

- $v_p(s_\ell t_k) = v_p(s_\ell) + v_p(t_k) = 0 + v_p(x) - v_p(y) = -v_p(y) \leq -1$.
- $v_p(s_k t_\ell) = v_p(s_k) + v_p(t_\ell) \geq 1 + 0 \geq 1$.

Hai số hạng có cấp p -adic khác nhau nên cấp p -adic của tổng sẽ bằng

$$v_p(X) = \min(v_p(s_\ell t_k), v_p(s_k t_\ell)) = v_p(s_\ell t_k) \leq -1 < 0.$$

Điều này dẫn đến mâu thuẫn trực tiếp với $X \in \mathbb{Z}$. Vậy mọi phần tử t_n đều bắt buộc phải là số nguyên. $\square$

Tài liệu tham khảo

- [1] Mathematical Association of America. *USAMO 2009 Official Solutions*.
- [2] Art of Problem Solving (AoPS) Community. *USAMO 2009, Problem 6 Discussion*.
<https://artofproblemsolving.com/community/c5h274378p1485204>

T's Lab