

IMO 2025 Shortlisted Problems: Geometry

G1. Cho tam giác ABC có $\angle A$ là góc tù. Giả sử D và E lần lượt là các điểm trên cạnh AB và AC sao cho tứ giác $BDEC$ nội tiếp. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt cạnh BC tại hai điểm X và Y sao cho các điểm B, X, Y, C nằm trên đường thẳng theo thứ tự đó. Gọi Ω và Γ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác BDX và CEY . Gọi P là điểm sao cho PD tiếp xúc với Ω và PE tiếp xúc với Γ . Gọi Q là điểm sao cho QB tiếp xúc với Ω và QC tiếp xúc với Γ .

Chứng minh rằng các điểm A, P và Q thẳng hàng.

(Cộng hòa Séc)

G2. Cho tam giác nhọn ABC . Gọi I_B và I_C lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc B và góc C của tam giác ABC . Gọi E là điểm trên đường thẳng BA sao cho $\angle EI_BB = 90^\circ$. Gọi F là điểm trên đường thẳng CA sao cho $\angle CI_CF = 90^\circ$. Giả sử đường tròn tâm I_B bán kính I_BE cắt đoạn thẳng I_BB tại X . Giả sử đường tròn tâm I_C bán kính I_CF cắt đoạn thẳng I_CC tại Y .

Chứng minh rằng BY vuông góc với CX .

Chú thích: Tâm đường tròn bàng tiếp góc B của tam giác ABC là tâm của đường tròn tiếp xúc với đoạn thẳng AC , tiếp xúc với tia BA ở phần nằm ngoài điểm A , và tiếp xúc với tia BC ở phần nằm ngoài điểm C . Tâm đường tròn bàng tiếp góc C được định nghĩa tương tự.

(Cộng hòa Hồi giáo Iran)

G3. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Gọi Γ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đường thẳng qua B vuông góc với AC cắt Γ tại điểm thứ hai $D \neq B$. Gọi Q là điểm trên Γ sao cho $Q \neq B$ và $AB = AQ$. Các đường thẳng BQ và AC cắt nhau tại R . Đường thẳng DR cắt Γ tại điểm thứ hai $S \neq D$. Đoạn thẳng BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác QRS tại T . Các đường thẳng TQ và RS cắt nhau tại X .

Chứng minh rằng CX vuông góc với AB .

(Kosovo)

G4. Gọi Ω và Γ lần lượt là các đường tròn tâm M và tâm N , sao cho bán kính của Ω nhỏ hơn bán kính của Γ . Giả sử hai đường tròn Ω và Γ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Đường thẳng MN cắt Ω tại C và cắt Γ tại D sao cho các điểm C, M, N và D nằm trên đường thẳng theo thứ tự đó. Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD . Đường thẳng AP cắt Ω tại điểm thứ hai $E \neq A$. Đường thẳng AP cắt Γ tại điểm thứ hai $F \neq A$. Gọi H là trực tâm của tam giác PMN .

Chứng minh rằng đường thẳng đi qua H song song với AP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF .

(Việt Nam)

G5. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $\angle ADC > 90^\circ$. Giả sử các điểm X và Y nằm trên đường chéo AC sao cho $\angle ADX = \angle YDC = 90^\circ$, $\angle CAD = \angle CBX$, và $\angle DCA = \angle YBA$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BXY . Giả sử điểm $R \neq O$ nằm trên đường trung trực của AC sao cho đường thẳng OR song song với AC .

Chứng minh rằng đường thẳng RO là đường phân giác của góc $\angle DRB$.

(Romania)

G6. Cho tam giác ABC có $\angle B > \angle A > \angle C$. Gọi Ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Các tiếp tuyến của Ω tại B và C cắt nhau tại P . Các đường thẳng BP và AC cắt nhau tại E . Các đường thẳng CP và AB cắt nhau tại F . Gọi D là điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng EF . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác DEB và DFC cắt nhau tại điểm thứ hai $Q \neq D$. Các đường thẳng DP và BC cắt nhau tại Z .

Chứng minh rằng các điểm A, Z và Q thẳng hàng.

(Ấn Độ)

G7. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có đường tròn ngoại tiếp Ω sao cho $CD > BD > BC$. Các tiếp tuyến của Ω tại B và C cắt nhau tại một điểm S . Một đường thẳng ℓ được gọi là đường thẳng "ven" (*coastal line*) nếu thoả mãn các điều kiện sau:

- ℓ không đi qua A ,
- ℓ cắt tia SD tại một điểm X_ℓ sao cho D nằm giữa S và X_ℓ (nằm ngoài đoạn SD về phía D), và
- tồn tại một đường tròn tiếp xúc đồng thời với đường thẳng ℓ , đường thẳng $X_\ell A$, đoạn thẳng SB và đoạn thẳng SC .

Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với Ω và tiếp xúc với tất cả các đường thẳng "ven".

(Cộng hòa Hồi giáo Iran)