



Thứ Tư, 15 Tháng Bảy 2026

**Bài 1.** Có 2026 số nguyên lớn hơn 1, không nhất thiết khác nhau, được viết trên bảng. Mỗi bước, Khổng Tử chọn hai số nguyên  $m > 1$  và  $n > 1$  ở các vị trí khác nhau trên bảng và thay hai số nguyên đó bằng

$$\gcd(m, n) \quad \text{và} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}.$$

Ông cứ thực hiện các bước như vậy chừng nào còn có thể.

(a) Chứng minh rằng, mặc các cách chọn của Khổng Tử, sau một số hữu hạn các bước, trên bảng có đúng một số  $M$  lớn hơn 1.

(b) Chứng minh rằng giá trị của  $M$  không phụ thuộc vào các cách chọn của Khổng Tử.

(Chú ý rằng  $\gcd(x, y)$  ký hiệu ước số chung lớn nhất của các số nguyên dương  $x$  và  $y$ , và  $\text{lcm}(x, y)$  ký hiệu bội số chung nhỏ nhất của  $x$  và  $y$ .)

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  và gọi  $M$  và  $N$  tương ứng là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $AC$ . Chọn các điểm  $K$  và  $L$  tương ứng nằm thực sự bên trong các tam giác  $BMC$  và  $BNC$ , sao cho  $K$  nằm thực sự bên trong tam giác  $ABL$  và  $L$  nằm thực sự bên trong tam giác  $AKC$ . Giả sử

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{và} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AKL$ . Chứng minh rằng  $OM = ON$ .

**Bài 3.** Cho số nguyên dương  $n$ . Lưu Bang và Hạng Vũ có một cái gậy có độ dài bằng 1 và muốn chia nhau nó. Lưu Bang đánh dấu không quá  $n$  điểm trên cái gậy, sau đó Hạng Vũ đánh dấu không quá  $n$  điểm trên cái gậy. Tất cả các điểm đánh dấu là phân biệt. Tiếp theo, cái gậy được chặt đứt tại các điểm được đánh dấu, tạo thành một số khúc. Sau đó, họ luân phiên lấy, mỗi lần được lấy một khúc tùy ý chưa được lấy của cái gậy, với Lưu Bang là người lấy đầu tiên. Mục tiêu của mỗi người chơi là có tổng độ dài các khúc gậy mà mình lấy được là lớn nhất.

Với mỗi  $n$ , xác định giá trị  $c$  lớn nhất sao cho Lưu Bang có thể đảm bảo lấy được các khúc gậy có tổng độ dài không nhỏ hơn  $c$ , bất kể cách chơi của Hạng Vũ là thế nào đi chăng nữa.



Thứ Năm, 16 Tháng Bảy 2026

**Bài 4.** Thiên Vu và Mộc Lan chơi một trò chơi. Cho góc  $\theta$  với  $0^\circ < \theta < 180^\circ$  mà cả hai người chơi đều biết. Đầu tiên, Thiên Vu làm một tam giác  $\mathcal{T}$  bằng giấy với kích thước theo ý mình. Sau đó, họ liên tục thực hiện các bước như sau:

- Nếu  $\mathcal{T}$  có ít nhất một góc có số đo bằng đúng  $\theta$  thì trò chơi kết thúc và Mộc Lan thắng cuộc.
- Nếu không, Mộc Lan chọn một điểm  $P$  nằm trên biên nhưng không trùng với một trong các đỉnh của  $\mathcal{T}$ . Sau đó cô cắt tam giác  $\mathcal{T}$  theo một đường thẳng từ  $P$  đến đỉnh đối diện của  $\mathcal{T}$ , chia nó thành hai tam giác.
- Thiên Vu bỏ một trong hai tam giác đi. Tam giác còn lại trở thành tam giác  $\mathcal{T}$  mới.

Với các giá trị thực nào của  $\theta$  thì Mộc Lan có thể đảm bảo cô sẽ thắng cuộc sau một số hữu hạn các bước, mặc cho Thiên Vu chơi như thế nào đi chăng nữa?

**Bài 5.** Ký hiệu  $\mathbb{R}_{>0}$  là tập hợp các số thực dương. Xác định tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  thỏa mãn

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

với mọi  $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ .

**Bài 6.** Cho một dãy vô hạn  $a_1, a_2, a_3, \dots$  gồm các số nguyên lớn hơn 1. Giả sử rằng với mọi số nguyên dương  $n$ , số hạng  $a_{n+1}$  là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn  $a_n$  sao cho  $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, n$ . Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương  $T$  và  $L$  sao cho

$$a_{n+T} = a_n + L$$

với mọi số nguyên dương  $n$ .

(Chú ý rằng  $\gcd(x, y)$  ký hiệu ước số chung lớn nhất của các số nguyên dương  $x$  và  $y$ .)