Biểu diễn số thực theo cơ số bất kỳ

Định lý 1. Cho số thực $\alpha \geq 0$ và số nguyên $b > 1$. Khi đó tồn tại đúng một dãy số nguyên $(c_i)_{i\geq 0}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

(1) $\alpha = c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{c_i}{b^i}$.

(2) $0 \leq c_i \leq b-1, \quad \forall i \geq 1$.

(3) $c_i < b-1$ với vô hạn i.

Chứng minh. Với mọi số nguyên dương n, ta có

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b-1}{b^{n+i}} = \frac{1}{b^n}. \qquad (*)$$

Xét dãy số nguyên $(c_i)_{i\geq 0}$ và dãy số thực $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ xác định bởi $c_0 = [\alpha]$, $\alpha_1 = \{\alpha\}$ và

$$c_i = [b\alpha_i], \quad \alpha_{i+1} = \{b\alpha_i\}, \quad \forall i \geq 1.$$

Do $\alpha_i \in [0,1)$ nên $b\alpha_i \in [0,b)$, suy ra $c_i = [b\alpha_i] \in \{0,1,\ldots,b-1\}$. Dễ thấy điều kiện thứ hai được thỏa mãn. Bằng quy nạp theo n, ta có

$$\alpha = c_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{b^i} + \frac{\alpha_{n+1}}{b^n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Mặt khác,

$$0 \leq \frac{\alpha_{n+1}}{b^n} < \frac{1}{b^n}, \quad \forall n \geq 1,$$

vì $b > 1$ nên khi $n \to +\infty$ thì $\frac{1}{b^n} \to 0$, suy ra điều kiện thứ nhất thỏa mãn. Bây giờ ta chứng minh tính chất thứ ba.

Giả sử có số nguyên dương n sao cho $c_i = b-1$ với mọi $i > n$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\alpha &= c_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{b^i} + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{b-1}{b^i} \\
&= c_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{b^i} + \frac{1}{b^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b-1}{b^i} \\
&= c_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{b^i} + \frac{1}{b^n},
\end{aligned}$$

điều này dẫn đến phần dư $\frac{\alpha_{n+1}}{b^n} = \frac{1}{b^n}$, suy ra $\alpha_{n+1} = 1$. Điều này là không thể vì $\alpha_{n+1} = \{b\alpha_n\} \in [0,1)$.

Để hoàn tất chứng minh ta còn phải chỉ ra sự duy nhất. Giả sử có dãy (b_i) có cùng các tính chất như (c_i). Từ $(*)$ và tính chất thứ ba ta có

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i}{b^i} < \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b-1}{b^i} = 1,$$

https://nttuan.org/
T's Lab
0915011235

suy ra $b_0 = [\alpha] = c_0$. Giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho $b_n \neq c_n$. Không mất tính tổng quát, giả sử $b_n < c_n$ và n là chỉ số nhỏ nhất thỏa mãn điều này. Do cách chọn n ta có

$$\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{c_i}{b^i} = \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{b_i}{b^i},$$

suy ra

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{b_i - c_i}{b^i} = \frac{c_n - b_n}{b^n} \geq \frac{1}{b^n}.$$

Mặt khác, do $c_i \geq 0$ nên $b_i - c_i \leq b_i \leq b - 1$. Hơn nữa, vì $b_i < b - 1$ với vô hạn i nên $b_i - c_i < b - 1$ với vô hạn i. Từ đó ta có đánh giá ngặt

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{b_i - c_i}{b^i} < \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{b-1}{b^i} = \frac{1}{b^n},$$

do đó có mâu thuẫn. Vậy sự biểu diễn là duy nhất. □

Tổng $c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{c_i}{b^i}$ được gọi là *biểu diễn b-phân* của α.

Nếu $c_0 = (b_m b_{m-1} \dots b_0)_b$ là biểu diễn b-phân của c_0 thì ta viết $\alpha = (b_m b_{m-1} \dots b_0, c_1 c_2 c_3 \dots)_b$ và cũng gọi đây là biểu diễn b-phân của α. Biểu diễn b-phân này được gọi là *tuần hoàn* nếu dãy (c_i) tuần hoàn kể từ lúc nào đó. Nếu kể từ lúc nào đó $c_i = 0$ thì ta nói α *có hữu hạn chữ số trong biểu diễn b-phân*, hay α có *biểu diễn b-phân hữu hạn.*

Định lý 2. Cho số nguyên $b > 1$ và số thực không âm α có biểu diễn b-phân

$$(b_m b_{m-1} \dots b_0, c_1 c_2 c_3 \dots)_b.$$

Khi đó $[b^n \alpha] = (b_m b_{m-1} \dots b_0 c_1 c_2 \dots c_n)_b$ với mọi số nguyên không âm n.

Chứng minh. Theo định nghĩa của biểu diễn b-phân, ta có $\alpha = c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{c_i}{b^i}$, trong đó $c_0 = (b_m b_{m-1} \dots b_0)_b$.

Nhân cả hai vế với b^n, ta được

$$\begin{aligned} b^n \alpha &= b^n c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{c_i}{b^{i-n}} \\ &= \left(b^n c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i b^{n-i} \right) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{c_i}{b^{i-n}}. \end{aligned}$$

Đặt $N = b^n c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i b^{n-i}$ và $R = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{c_i}{b^{i-n}} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_{n+j}}{b^j}$.

Rõ ràng N là một số nguyên và biểu diễn cơ số b của N chính là

$$N = (b_m b_{m-1} \dots b_0 c_1 c_2 \dots c_n)_b.$$

Ta cần chứng minh $0 \leq R < 1$.

Vì $c_i \geq 0$ với mọi i nên hiển nhiên $R \geq 0$. Mặt khác, theo định lý về biểu diễn cơ số b, ta có $c_i \leq b - 1$ với mọi $i \geq 1$. Do đó:

$$R = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_{n+j}}{b^j} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{b-1}{b^j} = 1.$$

https://nttuan.org/
T's Lab
0915011235

Hơn nữa, cũng theo tính chất của biểu diễn b-phân, tồn tại vô hạn chỉ số i sao cho $c_i < b-1$. Do đó, dãy $(c_{n+j})_{j\geq 1}$ không thể gồm toàn các số $b-1$. Điều này dẫn đến dấu bằng ở bất đẳng thức trên không thể xảy ra, tức là $R < 1$.

Vì $b^n\alpha = N + R$ với $N \in \mathbb{N}$ và $0 \leq R < 1$, theo định nghĩa của hàm phần nguyên, ta suy ra

$$[b^n\alpha] = N = (b_m b_{m-1} \dots b_0 c_1 c_2 \dots c_n)_b.$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn. □

T's Lab
https://nttuan.org/
0915011235