USA TSTST 2026

Bài 1. Cho tam giác nhọn không cân ABC. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, D là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống cạnh BC, và P là một điểm nằm trên đường thẳng AO sao cho P không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường tròn đường kính AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP tại điểm $E \neq P$, và cắt đường thẳng đi qua A song song với BC tại điểm $F \neq A$. Chứng minh rằng D, E và F thẳng hàng.
(Tác giả: Ankit Bisain)

Bài 2. Cho đồ thị G và một số nguyên dương ℓ, một *phép ℓ-tô màu* của G là một hàm $\sigma \colon V(G) \to \{1, 2, 3, \dots, \ell\}$ sao cho với bất kỳ cạnh uv nào trong G, ta đều có $\sigma(u) \neq \sigma(v)$. Hai phép ℓ-tô màu σ và σ' được gọi là *gần nhau* nếu $\sigma(u) \neq \sigma'(u)$ tại tối đa một đỉnh $u \in V(G)$.

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (k, m) với $k \leq m$ sao cho với mọi đồ thị G và mọi cặp (τ, τ') của các phép k-tô màu đồ thị G, luôn tồn tại một dãy $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$ gồm các phép m-tô màu của G thỏa mãn $\pi_0 = \tau$, $\pi_n = \tau'$, và π_i cùng với π_{i+1} là gần nhau với mọi $0 \leq i < n$.

Lưu ý: $V(G)$ ký hiệu tập hợp các đỉnh của G. Do $k \leq m$, τ và τ' cũng là các phép m-tô màu của G.
(Tác giả: Linus Tang)

Bài 3. Giả sử $f_1, f_2, \dots, f_{1000} \in \mathbb{C}[x]$ là các đa thức một biến với hệ số phức sao cho không tồn tại hai chỉ số $i, j \in \{1, 2, \dots, 1000\}$ phân biệt và số phức $a \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $f_i = af_j$. Biết rằng bậc của f_1 bằng 10, tìm bậc tổng quát (total degree) nhỏ nhất có thể của đa thức

$$\sum_{k=1}^{1000} f_k(x_1) f_k(x_2) \cdots f_k(x_{2026}).$$

Lưu ý: Ví dụ, bậc tổng quát của đa thức $g(x, y) = 20x^3y^4 + 26x^6$ là 7 vì $7 = 3 + 4 > 6$.
(Tác giả: Daniel Zhu)

Bài 4. Một *tổ ong* (beehive) là một đa giác mà tất cả các góc trong đều là bội số của $60°$. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho mọi *tổ ong* có 2026 cạnh đều có thể được biểu diễn dưới dạng hợp của tối đa k *tổ ong* lồi.

Lưu ý: Một đa giác bao gồm cả phần biên và phần bên trong của nó. Biên của đa giác phải là một vòng kín không tự cắt. Không cho phép các góc trong bằng $180°$.
(Tác giả: Carlos Rodriguez)

Bài 5. Gọi $\Omega(k)$ là số ước nguyên tố của k, tính cả ước bội. Ví dụ, $\Omega(20) = 3$, vì $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, tồn tại một số nguyên dương k nằm ngặt giữa n^2 và $(n+1)^2$ sao cho $\Omega(k)$ là một số lẻ.
(Tác giả: Ankit Bisain)

Bài 6. Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp Γ và gọi S là một điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi $P \neq S$ là giao điểm thứ hai của đường thẳng AS với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCS.

Gọi $T \neq A$ là một điểm thay đổi trên Γ, và gọi $Q \neq A$, $R \neq A$ lần lượt là giao điểm thứ hai của đường thẳng AT với đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABP và ACP. Gọi ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR. Chứng minh rằng, khi T thay đổi trên Γ, (các) giao điểm của đường thẳng ST với ω luôn nằm trên hai đường tròn cố định (ngoại trừ các trường hợp mà ω không được xác định).
(Tác giả: Frank Han)

Bài 7. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) có thứ tự sao cho $n+1$ là ước của $\binom{an+b}{n}$ với mọi số nguyên dương n.
(Tác giả: Pitchayut Saengrungkongka)

Bài 8. Cho A là một tập hợp hữu hạn gồm các số thực dương. Gọi a_k là số lượng các số thực dương phân biệt có thể được biểu diễn dưới dạng tổng của tối đa k phần tử (không nhất thiết phân biệt) thuộc A. Chứng minh rằng $2025a_{2026} \geq 2026a_{2025}$.
(Tác giả: Merlijn Staps)

Bài 9. Trong mặt phẳng, ta nói rằng một tập hợp điểm $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ *áp đảo* một tập hợp điểm $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_\ell\}$ nếu với mọi điểm P, ta có:

$$PA_1 + PA_2 + \cdots + PA_k \geq PB_1 + PB_2 + \cdots + PB_\ell.$$

Cho S là một tập hợp gồm n điểm trong mặt phẳng. Chứng minh rằng ta có thể phân hoạch S thành hai tập hợp A và B sao cho A áp đảo B và $|A| \leq |B| + 100\sqrt{n}$.
(Tác giả: Ankit Bisain)