

# American Masters of Mathematics 2026

Thứ Bảy, ngày 23 tháng 5 năm 2026

**Bài 1.** Xác định xem có tồn tại hay không một số nguyên tố  $p$  và một số nguyên dương  $N$  thỏa mãn tính chất sau: với bất kỳ số nguyên dương có  $N$  chữ số nào mà tất cả các chữ số thập phân của nó đều khác không, ta luôn có thể hoán vị các chữ số của nó để thu được một bội số của  $p$ .

**Bài 2.** Giả sử  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm giảm ngặt sao cho với mọi số thực  $x$ , ta đều có

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{2026 \text{ lần } f} = x.$$

- (1) Chứng minh rằng  $f(f(x)) = x$  với mọi số thực  $x$ .
- (2) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một số thực  $x$  sao cho  $f(x) = x$ .

**Bài 3.**

- (1) Chứng minh rằng  $a! + b! + 2026$  không phải là một số chính phương với mọi số nguyên dương  $a$  và  $b$ .
- (2) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$ , tồn tại một số nguyên dương  $k$  sao cho

$$a_1! + a_2! + \dots + a_n! + k$$

không phải là một số chính phương với mọi số nguyên dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Bài 4.** Bảng chữ cái Hy Lạp có 24 chữ cái in hoa và 24 chữ cái in thường. Trong mỗi ô của một bảng kích thước  $24 \times 24$ , ta viết một chữ cái in hoa và một chữ cái in thường, sao cho mỗi cặp trong số  $24^2$  cặp có thể có đều xuất hiện đúng một lần.

Giả sử rằng đối với mỗi ký hiệu trong số 48 ký hiệu, 24 ô chứa ký hiệu đó tạo thành một vùng liên thông. Chứng minh rằng 24 ô chứa ký hiệu  $\Omega$  hoặc cùng nằm trên một hàng, hoặc cùng nằm trên một cột.

Ở đây, ta nói một tập hợp  $S$  các ô tạo thành một vùng liên thông nếu với hai ô phân biệt  $s$  và  $s'$  bất kỳ trong  $S$ , tồn tại một đường đi nối chúng, tức là một dãy  $(s_0, s_1, \dots, s_m)$  gồm các ô phân biệt trong  $S$  sao cho  $s_0 = s$ ,  $s_m = s'$ , và với mỗi  $1 \leq i \leq m$ , hai ô  $s_i$  và  $s_{i-1}$  có chung một cạnh.

**Bài 5.** Trong không gian cho các tứ diện không suy biến  $ABDE$ ,  $BCEF$  và  $CAFD$  bằng nhau (cùng hướng, với các đỉnh theo thứ tự này). Một đường thẳng  $l$  cắt mỗi đường thẳng trong số các đường thẳng  $AD$ ,  $BE$  và  $CF$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $l$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Thời gian: 4 giờ 30 phút.  
Mỗi bài được 7 điểm.