

IMO 2020: Shortlisted Problems

Nguyễn Trung Tuân

THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam và T's Lab.

Tóm tắt nội dung

Trong tài liệu này chúng tôi sẽ giới thiệu các bài toán trong cuốn **IMO 2020: Shortlisted Problems**.

Mọi góp ý và thảo luận xin gửi về

Nguyễn Trung Tuân

THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam và T's Lab

Email: math@nttuan.org

Điện thoại: 0915011235

Mục lục

1	Đại số	2
2	Tổ hợp	4
3	Hình học	6
4	Số học	8

1 Đại số

A1. Với số nguyên dương N , tìm số thực b_N nhỏ nhất sao cho

$$\sqrt[N]{\frac{x^{2N}+1}{2}} \leq b_N(x-1)^2 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A2. Ký hiệu $\mathcal{A}$ là tập tất cả các đa thức ba biến x, y, z với hệ số nguyên. Gọi $\mathcal{B}$ là tập con của $\mathcal{A}$ gồm mọi đa thức có dạng

$$(x+y+z)P(x,y,z) + (xy+yz+zx)Q(x,y,z) + xyzR(x,y,z),$$

trong đó $P, Q, R \in \mathcal{A}$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $x^i y^j z^k \in \mathcal{B}$ với mọi số tự nhiên i, j, k thỏa mãn $i+j+k \geq n$.

A3. Xét các số thực dương a, b, c , và d thỏa mãn

$$(a+c)(b+d) = ac + bd.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

A4. Cho các số thực a, b, c , và d thỏa mãn $a \geq b \geq c \geq d > 0$ và

$$a+b+c+d=1.$$

Chứng minh rằng

$$(a+2b+3c+4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

(IMO2020/2)

A5. Một ảo thuật gia muốn thực hiện một trò như sau. Cô ấy thông báo số nguyên dương n , cùng với $2n$ số thực đôi một khác nhau $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ đến khán giả. Sau đó một khán giả chọn một đa thức bí mật $P(x)$ bậc n với hệ số thực, tính $2n$ giá trị $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_{2n})$, và viết các giá trị này lên bảng theo thứ tự không giảm. Cuối cùng, ảo thuật gia thông báo đa thức $P(x)$ cho khán giả. Liệu ảo thuật gia có thể tìm được cách để luôn thành công?

A6. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f^{a^2+b^2}(a+b) = af(a) + bf(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Trong đó f^n là lũy thừa bậc n của f theo phép toán hợp thành các ánh xạ.

A7. Cho hai số nguyên dương n và k . Chứng minh với $a_1, a_2, \dots, a_n \in [1; 2^k]$, ta có

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_i^2}} \leq 4\sqrt{kn}.$$

A8. Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ sao cho

$$f(x + f(xy)) + y = f(x)f(y) + 1, \quad \forall x, y \in (0; +\infty).$$

2 Tổ hợp

C1. Cho số nguyên dương n . Tìm số hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của tập $[n]$ thỏa mãn

$$a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \dots \leq na_n.$$

C2. Trong 100–giác đều, 41 đỉnh được tô màu đen và 59 đỉnh còn lại được tô màu trắng. Chứng minh rằng tồn tại 24 tứ giác lồi $Q_1, Q_2, \dots, Q_{24}$ có các đỉnh là các đỉnh của 100–giác đều sao cho

- các tứ giác $Q_1, \dots, Q_{24}$ đôi một rời nhau, và
- mỗi tứ giác Q_i có ba đỉnh cùng màu và một đỉnh có màu khác.

C3. Cho một số nguyên n lớn hơn 1. Có n^2 trạm dừng trên một sườn núi, tất cả đều nằm ở các độ cao khác nhau. Mỗi công ty trong số hai công ty cáp treo, A và B , vận hành k cáp treo; mỗi cáp treo cung cấp dịch vụ chuyển từ một trong các trạm đến trạm cao hơn (không có điểm dừng trung gian). k cáp treo của A có k điểm xuất phát khác nhau và k điểm đến khác nhau, và cáp treo bắt đầu cao hơn cũng kết thúc cao hơn. Các điều kiện tương tự cũng đúng với B . Hai trạm được gọi là *liên kết* bởi một công ty nếu một người có thể bắt đầu từ trạm thấp hơn và đến trạm cao hơn bằng cách sử dụng một hoặc nhiều cáp treo của công ty đó (không được phép di chuyển kiểu khác giữa các trạm). Xác định số nguyên dương k nhỏ nhất để đảm bảo rằng có hai trạm được liên kết bởi cả hai công ty.

(IMO2020/4)

C4. Các số Fibonacci $F_0, F_1, F_2, \dots$ được xác định bởi $F_0 = 0, F_1 = 1$, và

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Cho số nguyên $n \geq 2$, tìm cỡ nhỏ nhất của một tập S các số nguyên sao cho với mỗi $k = 2, 3, \dots, n$, tồn tại $x, y \in S$ để $x - y = F_k$.

(Croatia)

C5. Cho số nguyên tố lẻ p , và đặt $N = \frac{1}{4}(p^3 - p) - 1$. Các số $1, 2, \dots, N$ được tô bởi hai màu xanh và đỏ theo cách tùy ý. Với mỗi số nguyên dương $n \leq N$, ký hiệu $r(n)$ là tỷ lệ các số trong $\{1, 2, \dots, n\}$ có màu đỏ. Chứng minh rằng tồn tại $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ sao cho $r(n) \neq a/p$ với mọi $n = 1, 2, \dots, N$.

(Hà Lan)

C6. Cho số nguyên dương n và $4n$ viên sỏi có trọng lượng $1, 2, 3, \dots, 4n$. Mỗi viên sỏi được tô bởi một trong n màu và có bốn viên sỏi mỗi màu. Chứng minh rằng ta có thể sắp xếp các viên sỏi thành hai đồng sao cho cả hai điều kiện sau đây đều được thỏa mãn:

- Tổng trọng lượng của các viên sỏi ở cả hai đồng là như nhau.
- Mỗi đồng chứa hai viên sỏi mỗi màu.

(IMO2020/3)

C7. Xét một bảng chữ nhật bất kỳ với hữu hạn hàng và cột, với một số thực $a(r, c)$ trong ô ở hàng r và cột c . Một cặp (R, C) , trong đó R là một tập hợp các hàng và C là một tập hợp các cột, được gọi là một cặp *yên ngựa* nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

- (i) Với mỗi hàng r' , có $r \in R$ sao cho $a(r, c) \geq a(r', c)$ với mọi $c \in C$;
- (ii) Với mỗi cột c' , có $c \in C$ sao cho $a(r, c) \leq a(r, c')$ với mọi $r \in R$.

Một cặp yên ngựa (R, C) được gọi là *cực tiểu* nếu với mỗi cặp yên ngựa (R', C') thỏa mãn $R' \subset R$ và $C' \subset C$, ta có $R' = R$ và $C' = C$. Chứng minh rằng hai cặp cực tiểu bất kỳ chứa cùng số hàng.

(Thái Lan)

C8. Hai người chơi, A và B , chơi một trò chơi trên bảng ban đầu chứa có 2020 số 1. Ở mỗi lượt chơi, A xóa hai số x và y trên bảng, sau đó B viết một trong các số $x + y$ và $|x - y|$ lên bảng. Trò chơi kết thúc ngay khi kết thúc một lượt, một trong hai điều sau đây thỏa mãn:

- (1) một trong các số trên bảng lớn hơn tổng của tất cả các số khác;
- (2) chỉ có các số không trên bảng.

Sau khi kết thúc, B phải đưa số kẹo cho A bằng số lượng số trên bảng. A muốn nhận càng nhiều kẹo càng tốt, trong khi B muốn cho càng ít kẹo càng tốt. Xác định số kẹo mà A nhận được nếu cả hai người chơi đều chơi giỏi.

3 Hình học

G1. Cho ABC là một tam giác cân với $BC = CA$, và D là một điểm trên cạnh AB sao cho $AD < DB$. Gọi P và Q lần lượt là hai điểm trên các cạnh BC và CA sao cho $\angle DPB = \angle DQA = 90^\circ$. Đường trung trực của PQ cắt đoạn thẳng CQ tại E , đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và CPQ cắt nhau tại F và C . Giả sử P, E, F thẳng hàng. Chứng minh rằng $\angle ACB = 90^\circ$.

G2. Cho tứ giác lồi $ABCD$ và điểm P nằm trong nó sao cho

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

Chứng minh rằng ba đường thẳng sau đây cùng đi qua một điểm: đường phân giác của $\angle ADP$, $\angle PCB$, và đường trung trực của đoạn thẳng AB .

(IMO2020/1)

G3. Cho $ABCD$ là một tứ giác lồi có $\angle ABC > 90^\circ$, $\angle CDA > 90^\circ$ và $\angle DAB = \angle BCD$. Gọi E và F lần lượt là các điểm đối xứng với A qua BC và CD . Giả sử rằng các đoạn AE và AF lần lượt cắt đường thẳng BD tại K và L . Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác BEK và DFL tiếp xúc với nhau.

(Slovakia)

G4. Trong mặt phẳng, có $n \geq 6$ cái đĩa đôi một rời nhau $D_1, D_2, \dots, D_n$ với bán kính

$$R_1 \geq R_2 \geq \dots \geq R_n.$$

Với mỗi $i = 1, 2, \dots, n$, một điểm P_i được chọn trong đĩa D_i . Cho O là một điểm tùy ý trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

$$OP_1 + OP_2 + \dots + OP_n \geq R_6 + R_7 + \dots + R_n.$$

(Một đĩa được giả định là chứa biên của nó.)

G5. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Các điểm K, L, M, N lần lượt được chọn trên AB, BC, CD, DA sao cho $KLMN$ là hình thoi có $KL \parallel AC$ và $LM \parallel BD$. Gọi $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ lần lượt là đường tròn nội tiếp của các tam giác ANK, BKL, CLM, DMN . Chứng minh rằng các tiếp tuyến chung trong của ω_A, ω_C và các tiếp tuyến chung trong của ω_B và ω_D đồng quy.

G6. Cho ABC là tam giác có $AB < AC$, I là tâm đường tròn nội tiếp, và I_A là tâm đường tròn bàng tiếp góc A . Đường tròn nội tiếp tam giác gặp BC tại D . Giả sử $E = AD \cap BI_A$ và $F = AD \cap CI_A$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác AID và I_AEF tiếp xúc với nhau.

G7. Gọi P là một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn ABC . Gọi D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng với P qua A -trung bình, B -trung bình, và C -trung bình. Gọi ω là đường tròn ngoại tiếp của tam giác tạo bởi các đường trung trực

của AD, BE, CF . Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ADP, BEP, CFP , và ω cùng đi qua một điểm.

G8. Cho ABC là tam giác với tâm đường tròn nội tiếp I và đường tròn ngoại tiếp Γ . Các đường tròn ω_B đi qua B và ω_C đi qua C tiếp xúc nhau tại I . ω_B gặp cung nhỏ AB của Γ tại P và AB tại $M \neq B$, đồng thời ω_C gặp cung nhỏ AC của Γ tại Q và AC tại $N \neq C$. Các tia PM và QN cắt nhau tại X . Gọi Y là một điểm sao cho YB tiếp xúc với ω_B và YC tiếp xúc với ω_C . Chứng minh ba điểm A, X và Y thẳng hàng.

G9. Chứng minh rằng tồn tại hằng số dương c sao cho mệnh đề sau đúng: Xét một số nguyên $n > 1$, và một tập hợp $\mathcal{S}$ gồm n điểm trong mặt phẳng sao cho khoảng cách giữa hai điểm khác nhau bất kỳ trong $\mathcal{S}$ ít nhất là 1. Khi đó tồn tại một đường thẳng ℓ tách $\mathcal{S}$ sao cho khoảng cách từ bất kỳ điểm nào của $\mathcal{S}$ đến ℓ ít nhất là $cn^{-1/3}$. (Một đường thẳng ℓ tách một tập hợp các điểm $\mathcal{S}$ nếu có một đoạn thẳng nối hai điểm trong $\mathcal{S}$ cắt ℓ .)

Chú ý. Kết quả yếu hơn với $cn^{-1/3}$ được thay bằng $cn^{-\alpha}$ có thể được điểm tùy thuộc vào giá trị của hằng số $\alpha > 1/3$.

(IMO2020/6)

4 Số học

N1. Cho một số nguyên dương k . Chứng tỏ rằng tồn tại số nguyên tố p sao cho ta có thể chọn các số nguyên phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_{k+3} \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ để p chia hết $a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} - i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$.

N2. Đối với mỗi số nguyên tố p , dựng một đồ thị G_p trên $\{1, 2, \dots, p\}$, trong đó $m \neq n$ kề nhau khi và chỉ khi p chia hết $(m^2 + 1 - n)(n^2 + 1 - m)$. Chứng minh rằng G_p không liên thông với vô hạn p .

N3. Cho số nguyên $n > 1$ và một bộ bài gồm n quân bài. Một số nguyên dương được viết trên mỗi quân bài. Bộ bài này có đặc điểm là trung bình cộng của các số trên mỗi cặp quân bài cũng là trung bình nhân của các số trên một tập hợp nào đó gồm một hoặc nhiều quân bài. Với n nào thì các số trên các quân bài bằng nhau?

(IMO2020/5)

N4. Đối với mỗi số nguyên tố lẻ p và mỗi số nguyên n , ký hiệu $d_p(n)$ là dư khi chia n cho p . Ta nói rằng $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ là một p -dãy, nếu a_0 là một số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với p , và

$$a_{n+1} = a_n + d_p(a_n)$$

với mọi $n \geq 0$.

- (a) Liệu có tồn tại vô hạn số nguyên tố p sao cho có các p -dãy $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ và $(b_0, b_1, b_2, \dots)$ sao cho $a_n > b_n$ với vô hạn n , và $b_n > a_n$ với vô hạn n ?
- (b) Liệu có tồn tại vô hạn số nguyên tố p sao cho có các p -dãy $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ và $(b_0, b_1, b_2, \dots)$ sao cho $a_0 < b_0$, nhưng $a_n > b_n$ với mọi $n \geq 1$?

(Anh)

N5. Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập các số nguyên dương và lấy giá trị nguyên không âm thỏa mãn ba điều kiện sau:

- (i) tồn tại n để $f(n) \neq 0$;
- (ii) $f(xy) = f(x) + f(y)$ với mỗi số nguyên dương x và y ;
- (iii) có vô hạn n sao cho $f(k) = f(n - k)$ với mọi $k < n$.

N6. Với mỗi số nguyên dương n , gọi $d(n)$ là số ước dương của n , và $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n . Liệu có tồn tại hằng số C sao cho

$$\frac{\varphi(d(n))}{d(\varphi(n))} \leq C$$

với mọi $n \geq 1$?

(Cyprus)

N7. Cho $\mathcal{S}$ là một tập hợp gồm $n \geq 3$ số nguyên dương, không có số nào bằng tổng của hai số khác nhau trong $\mathcal{S}$. Chứng minh rằng các phần tử của $\mathcal{S}$ có thể được đánh số như là $a_1, a_2, \dots, a_n$ sao cho a_i không chia hết $a_{i-1} + a_{i+1}$ với mọi $i = 2, 3, \dots, n-1$.