

IMO 2019: Shortlisted Problems

Nguyễn Trung Tuân

THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam và T's Lab.

Tóm tắt nội dung

Trong tài liệu này chúng tôi sẽ giới thiệu các bài toán trong cuốn **IMO 2019: Shortlisted Problems**.

Mọi góp ý và thảo luận xin gửi về

Nguyễn Trung Tuân

THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam và T's Lab

Email: math@nttuan.org

Điện thoại: 0915011235

Mục lục

1	Đại số	2
2	Tổ hợp	4
3	Hình học	6
4	Số học	8

1 Đại số

A1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho với mỗi số nguyên a và b ,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

(IMO2019/1, South Africa)

A2. Cho các số thực $u_1, u_2, \dots, u_{2019}$ thỏa mãn

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2019} = 0 \quad \text{và} \quad u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{2019}^2 = 1.$$

Đặt $a = \min(u_1, u_2, \dots, u_{2019})$ và $b = \max(u_1, u_2, \dots, u_{2019})$. Chứng minh rằng

$$ab \leq -\frac{1}{2019}.$$

A3. Cho số nguyên $n \geq 3$ và $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ là một dãy tăng nghiêm ngặt n số thực dương có tổng bằng 2. Cho X là một tập con của $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho

$$\left| 1 - \sum_{i \in X} a_i \right|$$

nhỏ nhất. Chứng minh rằng có một dãy tăng nghiêm ngặt n số thực dương $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ có tổng bằng 2 sao cho

$$\sum_{i \in X} b_i = 1.$$

A4. Cho số nguyên $n \geq 2$ và các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ sao cho

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0.$$

Định nghĩa tập hợp A bởi

$$A = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, |a_i - a_j| \geq 1\}$$

Chứng minh rằng nếu A khác tập hợp rỗng thì

$$\sum_{(i,j) \in A} a_i a_j < 0.$$

A5. Cho số nguyên $n > 1$ và các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \prod_{j \neq i} \frac{1 - x_i x_j}{x_i - x_j} = \begin{cases} 0, & \text{nếu } n \text{ chẵn;} \\ 1, & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

A6. Cho đa thức $P(x, y, z)$ với hệ số thực thỏa mãn

$$P(x, y, z) = P(x, y, xy - z) = P(x, zx - y, z) = P(yz - x, y, z).$$

Chứng minh rằng tồn tại đa thức $F(t)$ sao cho

$$P(x, y, z) = F(x^2 + y^2 + z^2 - xyz).$$

A7. Xét các hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(f(x + y) + y) = f(f(x) + y)$$

với mọi số nguyên x và y . Với một hàm f như vậy, ta nói một số nguyên v là *f -hiếm* có nếu tập hợp

$$X_v = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = v\}$$

là hữu hạn và khác rỗng.

- (a) Chứng minh rằng tồn tại hàm f mà có số nguyên là f -hiếm có.
- (b) Chứng minh rằng không có hàm f có nhiều hơn một số nguyên là f -hiếm có.

2 Tổ hợp

C1. Dãy vô hạn $a_0, a_1, a_2, \dots$ các số nguyên có các tính chất sau: $0 \leq a_i \leq i$ với mọi $i \geq 0$, và

$$\binom{k}{a_0} + \binom{k}{a_1} + \dots + \binom{k}{a_k} = 2^k$$

với mọi số nguyên $k \geq 0$. Chứng minh rằng tất cả các số nguyên $N \geq 0$ xuất hiện trong dãy.

C2. Bạn được cung cấp một tập hợp gồm n khối gỗ, mỗi khối nặng ít nhất 1; tổng trọng lượng của chúng là $2n$. Chứng minh rằng với mọi số thực r với $0 \leq r \leq 2n - 2$, bạn có thể chọn một tập hợp con các khối có tổng trọng lượng ít nhất là r nhưng nhiều nhất là $r + 2$.

C3. Ngân hàng Bath phát hành tiền xu với một mặt có chữ H và mặt kia là T . Harry có n trong số những đồng xu này được xếp thành một hàng từ trái sang phải. Anh ta lặp đi lặp lại thao tác sau: nếu có đúng $k > 0$ đồng xu hiển thị H , anh ta lật đồng xu thứ k từ bên trái sang; nếu không, tất cả các đồng xu đều hiển thị T và anh ta dừng lại. Ví dụ: nếu $n = 3$ thì quá trình bắt đầu với cấu hình THT sẽ là $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$, quá trình này sẽ dừng sau ba thao tác.

- (a) Chứng tỏ rằng, đối với mỗi cấu hình ban đầu, Harry dừng lại sau một số hữu hạn thao tác.
- (b) Đối với mỗi cấu hình ban đầu C , đặt $L(C)$ là số thao tác trước khi Harry dừng. Ví dụ: $L(THT) = 3$ và $L(TTT) = 0$. Xác định giá trị trung bình của $L(C)$ trên tất cả 2^n cấu hình ban đầu có thể có của C .

(IMO2019/5)

C4. Trên một mặt phẳng ở Camelot, Vua Arthur xây dựng một mê cung $\mathfrak{L}$ bao gồm n bức tường, mỗi bức tường là một đường thẳng vô tận. Không có hai bức tường nào song song và không có ba bức tường nào có điểm chung. Merlin sau đó sơn một mặt của mỗi bức tường hoàn toàn màu đỏ và mặt kia hoàn toàn màu xanh lam.

Tại giao điểm của hai bức tường có bốn góc: hai góc đối diện theo đường chéo nơi một bên màu đỏ và một bên màu xanh gặp nhau, một góc nơi hai bên màu đỏ gặp nhau và một góc nơi hai bên màu xanh gặp nhau. Tại mỗi ngã tư như vậy, có một cửa hai chiều nối hai góc đối diện theo đường chéo mà tại đó các cạnh có màu khác nhau gặp nhau.

Sau khi Merlin sơn tường, Morgana sau đó đặt một số hiệp sĩ vào mê cung. Các hiệp sĩ có thể đi xuyên qua cửa, nhưng không thể đi xuyên tường.

Đặt $k(\mathfrak{L})$ là số lớn nhất k sao cho, bất kể Merlin vẽ mê cung $\mathfrak{L}$ như thế nào, Morgana luôn có thể đặt ít nhất k hiệp sĩ sao cho không có hai trong số họ có thể gặp nhau. Với mỗi n , tìm tất cả các giá trị có thể có của $k(\mathfrak{L})$, trong đó $\mathfrak{L}$ là một mê cung với n bức tường.

C5. Một mạng xã hội có 2019 người dùng, một số cặp là bạn bè. Bất cứ khi nào người dùng A kết bạn với người dùng B , thì người dùng B cũng là bạn với người dùng A . Các sự kiện thuộc loại sau có thể xảy ra lặp đi lặp lại, mỗi lần một sự kiện: Ba người

dùng A , B và C sao cho A là bạn của cả B và C , nhưng B và C không phải là bạn của nhau, hãy thay đổi trạng thái bạn bè của họ sao cho B và C là bạn của nhau, nhưng A không còn là bạn của B và không còn là bạn của C . Tất cả các trạng thái bạn bè khác không thay đổi.

Ban đầu, có 1010 người dùng mà mỗi người có 1009 bạn và 1009 người dùng mà mỗi người có 1010 bạn. Chứng minh rằng tồn tại một chuỗi các sự kiện mà sau đó mỗi người dùng là bạn của nhiều nhất một người dùng khác.

(IMO2019/3)

C6. Cho số nguyên $n > 1$ và $2n$ điểm trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Các điểm được gán nhãn $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ theo thứ tự nào đó. Sau đó, chúng ta xét $2n$ góc

$$\angle A_1 A_2 A_3, \angle A_2 A_3 A_4, \dots, \angle A_{2n-2} A_{2n-1} A_{2n}, \angle A_{2n-1} A_{2n} A_1, \angle A_{2n} A_1 A_2.$$

Chứng minh rằng tồn tại một cách gán nhãn các điểm đã cho để $2n$ góc tạo thành có thể được chia thành hai nhóm với tổng các góc trong một nhóm bằng tổng các góc trong nhóm kia.

C7. Có 60 hộp rỗng $B_1, \dots, B_{60}$ liên tiếp trên bàn và một nguồn cung cấp sỏi không giới hạn. Cho một số nguyên dương n , Alice và Bob chơi trò chơi sau. Trong vòng đầu tiên, Alice lấy n viên sỏi và chia chúng vào 60 hộp theo ý muốn. Mỗi vòng tiếp theo bao gồm hai bước:

- Bob chọn một số nguyên k với $1 \leq k \leq 59$ và chia các hộp thành hai nhóm $B_1, \dots, B_k$ và $B_{k+1}, \dots, B_{60}$.
- Alice chọn một trong hai nhóm này, thêm một viên sỏi vào mỗi hộp của nhóm đó và lấy một viên sỏi từ mỗi hộp của nhóm kia.

Bob thắng nếu vào lúc kết thúc của một vòng bất kỳ, có một hộp không chứa viên sỏi nào. Tìm n nhỏ nhất sao cho Alice có thể ngăn Bob thắng.

(Cộng hòa Séc)

C8. Alice có một bản đồ của Wonderland, một quốc gia bao gồm $n \geq 2$ thị trấn. Đối với mỗi cặp thị trấn, có một con đường hẹp đi từ thị trấn này sang thị trấn khác. Một ngày nào đó, tất cả các con đường được thông báo chỉ là “một chiều”. Alice không có thông tin về hướng đi của các con đường, nhưng Bob đã đề nghị giúp đỡ cô ấy. Cô được phép hỏi anh ta một số câu hỏi. Đối với mỗi câu hỏi, Alice chọn một cặp thị trấn và Bob cho cô ấy biết hướng của con đường nối hai thị trấn đó.

Alice muốn biết liệu có ít nhất một thị trấn ở Wonderland có nhiều nhất một con đường đi ra hay không. Chứng minh rằng cô ấy luôn có thể tìm ra câu trả lời bằng cách hỏi tối đa $4n$ câu hỏi.

C9. Với hai số thực khác nhau bất kỳ x và y , chúng ta định nghĩa $D(x, y)$ là số nguyên duy nhất d thỏa mãn $2^d \leq |x - y| < 2^{d+1}$. Cho một tập hợp các số thực $\mathcal{F}$, và một phần tử $x \in \mathcal{F}$, ta gọi *vảy* của x trong $\mathcal{F}$ là các giá trị $D(x, y)$ với $y \in \mathcal{F}$ mà $x \neq y$. Cho k là một số nguyên dương cho trước.

Giả sử rằng mỗi phần tử x của $\mathcal{F}$ có tối đa k vảy trong $\mathcal{F}$. Hỏi kích thước tối đa có thể có của $\mathcal{F}$ là bao nhiêu?

3 Hình học

G1. Cho tam giác ABC . Đường tròn Γ đi qua A , cắt các đoạn AB và AC lần lượt tại các điểm D và E , và cắt đoạn BC tại F và G sao cho F nằm giữa B và G . Tiếp tuyến của đường tròn (BDF) tại F và tiếp tuyến của đường tròn (CEG) tại G cắt nhau tại điểm T . Giả sử rằng các điểm A và T khác nhau. Chứng minh rằng AT song song với BC .

(Nigeria)

G2. Cho tam giác nhọn ABC với ba đường cao AD, BE, CF . Ký hiệu ω_B và ω_C lần lượt là các đường tròn nội tiếp của các tam giác BDF và CDE . Các đường tròn này tiếp xúc với các đoạn thẳng DF và DE lần lượt tại M và N . Đường thẳng MN cắt lại các đường tròn ω_B và ω_C lần lượt tại $P \neq M$ và $Q \neq N$. Chứng minh rằng $MP = NQ$.

(Việt Nam)

G3. Trong tam giác ABC , điểm A_1 nằm trên cạnh BC và điểm B_1 nằm trên cạnh AC . Gọi P và Q lần lượt là các điểm trên các đoạn AA_1 và BB_1 sao cho PQ song song với AB . Gọi P_1 là một điểm trên đường thẳng PB_1 sao cho B_1 nằm giữa P và P_1 , và $\angle PP_1C = \angle BAC$. Tương tự, gọi Q_1 là điểm trên QA_1 sao cho A_1 nằm giữa Q và Q_1 , và $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Chứng minh rằng các điểm P, Q, P_1 , và Q_1 cùng thuộc một đường tròn.

(IMO2019/2)

G4. Cho P là một điểm nằm trong tam giác ABC . AP cắt BC tại A_1 , BP cắt CA tại B_1 và CP cắt AB tại C_1 . Gọi A_2 là điểm sao cho A_1 là trung điểm của PA_2 , B_2 là điểm sao cho B_1 là trung điểm của PB_2 và C_2 là điểm sao cho C_1 là trung điểm của PC_2 . Chứng minh rằng các điểm A_2, B_2 , và C_2 không thể cùng nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

(Úc)

G5. Cho $ABCDE$ là một ngũ giác lồi với $CD = DE$ và $\angle EDC \neq 2 \cdot \angle ADB$. Giả sử P là một điểm nằm bên trong ngũ giác sao cho $AP = AE$ và $BP = BC$. Chứng minh rằng P nằm trên đường chéo CE khi và chỉ khi

$$S_{BCD} + S_{ADE} = S_{ABD} + S_{ABP}.$$

(Hungari)

G6. Cho tam giác ABC với tâm đường tròn nội tiếp I . Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với BC, CA và AB lần lượt tại D, E và F . Đường thẳng EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại P và Q , sao cho F nằm giữa E và P . Chứng minh rằng

$$\angle DPA + \angle AQD = \angle QIP.$$

(Slovakia)

G7. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác nhọn không cân ABC . Đường tròn nội tiếp ω của ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB lần lượt tại D, E , và F . Đường thẳng qua D vuông góc với EF cắt ω tại R . AR cắt lại ω tại P . Các đường tròn ngoại tiếp tam giác PCE và PBF cắt lại nhau tại Q . Chứng minh rằng các đường thẳng DI và PQ cắt nhau trên đường thẳng qua A và vuông góc với AI .

(IMO2019/6)

G8. Gọi $\mathcal{L}$ là tập hợp tất cả các đường trong mặt phẳng và gọi f là một hàm gán cho mỗi $\ell \in \mathcal{L}$ một điểm $f(\ell)$ trên ℓ . Giả sử rằng với mỗi điểm X , và ba đường ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 bất kỳ đi qua X , các điểm $f(\ell_1), f(\ell_2), f(\ell_3)$, và X nằm trên một đường tròn. Chứng minh rằng có đúng một điểm P sao cho $f(\ell) = P$, với mọi đường thẳng ℓ đi qua P .

(Úc)

4 Số học

N1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (k, n) sao cho

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

(IMO2019/4)

N2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^2.$$

N3. Một tập S các số nguyên được gọi là *tốt* nếu, với mỗi số nguyên dương n và mỗi $a_0, a_1, \dots, a_n \in S$ với $a_n \neq 0$, tất cả nghiệm nguyên của đa thức $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ đều thuộc S . Tìm tất cả các tập tốt chứa $2^a - 2^b$ với mọi $a, b \in \mathbb{N}^*$.

N4. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ sao cho $a + f(b)$ chia hết $a^2 + bf(a)$ với mọi số nguyên dương a và b thỏa mãn $a + b > 2019$.

N5. Cho a là một số nguyên dương. Ta nói rằng một số nguyên dương b là *a-tốt* nếu $\binom{an}{b} - 1$ chia hết cho $an + 1$ với mọi số nguyên dương n mà $an \geq b$. Giả sử b là một số nguyên dương sao cho b là *a-tốt*, nhưng $b + 2$ không phải là *a-tốt*. Chứng minh rằng $b + 1$ là số nguyên tố.

N6. Đặt $H = \{ \lfloor i\sqrt{2} \rfloor : i \in \mathbb{Z}_{>0} \} = \{1, 2, 4, 5, 7, \dots\}$ và cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại một hằng số C sao cho nếu $A \subset [n]$ thỏa mãn $|A| \geq C\sqrt{n}$, thì tồn tại $a, b \in A$ sao cho $a - b \in H$. (Ở đây $\mathbb{Z}_{>0}$ là tập hợp các số nguyên dương và $\lfloor z \rfloor$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng z .)

N7. Chứng minh rằng tồn tại hằng số $c > 0$ và vô hạn số nguyên dương n có tính chất: có vô hạn số nguyên dương không thể biểu diễn dưới dạng tổng của ít hơn $cn \log(n)$ lũy thừa bậc n của các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau. (Canada)

N8. Cho a và b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng số nguyên

$$a^2 + \left\lceil \frac{4a^2}{b} \right\rceil$$

không phải là một số chính phương. (Ở đây $\lceil z \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng z .)

(Nga)