

IMO 2017: Shortlisted Problems

Nguyễn Trung Tuân

THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam và T's Lab.

Tóm tắt nội dung

Trong tài liệu này chúng tôi sẽ giới thiệu các bài toán trong cuốn **IMO 2017: Shortlisted Problems**.

Mọi góp ý và thảo luận xin gửi về

Nguyễn Trung Tuân

THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam và T's Lab

Email: math@nttuan.org

Điện thoại: 0915011235

Mục lục

1	Đại số	2
2	Tổ hợp	4
3	Hình học	6
4	Số học	7

1 Đại số

A1. Cho $n, a_1, a_2, \dots, a_n, k$ và M là các số nguyên dương thỏa mãn

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = k$$

và $a_1 a_2 \cdots a_n = M$. Chứng minh rằng nếu $M > 1$ thì đa thức

$$P(x) = M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$$

không có nghiệm dương.

A2. Cho số thực q . Gugu có một tờ giấy trên đó viết 10 số thực phân biệt. Anh ấy viết lên bảng 3 dòng các số thực như sau:

- Dòng 1, viết tất cả các số có dạng $a - b$, trong đó a, b là các số (không cần khác nhau) trên tờ giấy.
- Dòng 2, viết tất cả các số có dạng qab , trong đó a, b là các số (không cần khác nhau) trên dòng 1.
- Dòng 3, viết tất cả các số có dạng $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$, trong đó a, b, c, d là các số (không cần khác nhau) trên dòng 1.

Tìm tất cả các giá trị của q sao cho với mỗi cách chọn 10 số trên tờ giấy, mọi số trên dòng 2 cũng nằm trên dòng 3.

A3. Cho S là một tập hữu hạn và $\mathcal{A}$ là tập tất cả các ánh xạ từ S đến S . Xét $f \in \mathcal{A}$ và đặt $T = f(S)$. Chứng minh rằng nếu $f(g(f(s))) \neq g(f(g(s)))$ với mọi $g \in \mathcal{A} \setminus \{f\}$ thì $f(T) = T$.

A4. Cho dãy các số thực $(a_n)_{n \geq 1}$ thỏa mãn

$$a_n = -\max_{i+j=n} (a_i + a_j), \quad \forall n > 2017.$$

Chứng minh rằng dãy số này bị chặn.

A5. Cho số nguyên $n > 2$. Một bộ n số thực $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là *tốt* nếu với mọi hoán vị $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ của nó ta có $\sum_{i=1}^{n-1} y_i y_{i+1} \geq -1$. Tìm hằng số K lớn nhất sao cho với mọi bộ tốt $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ta có

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \geq K.$$

A6. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

A7. Cho $(a_n)_{n \geq 0}$ là một dãy các số nguyên và $(b_n)_{n \geq 0}$ là một dãy các số nguyên dương sao cho $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ và với mỗi $n \geq 1$,
(IMO2017/2)

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n b_n + a_{n-1}, & \text{nếu } b_{n-1} = 1 \\ a_n b_n - a_{n-1}, & \text{nếu } b_{n-1} > 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_{2017} \geq 2017$ hoặc $a_{2018} \geq 2017$.

A8. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (f(x) + y)(f(y) + x) > 0 \Rightarrow f(x) + y = f(y) + x.$$

Chứng minh rằng $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x > y \Rightarrow f(x) + y \leq f(y) + x$.

2 Tổ hợp

C1. Một hình chữ nhật $\mathcal{R}$ có độ dài các cạnh là số nguyên lẻ được chia thành các hình chữ nhật nhỏ có độ dài các cạnh là số nguyên. Chứng minh rằng có ít nhất một trong số các hình chữ nhật nhỏ có khoảng cách đến bốn cạnh của $\mathcal{R}$ cùng là số lẻ hoặc cùng là số chẵn.

(Singapore)

C2. Cho n là một số nguyên dương. Định nghĩa một *con tắc kè hoa* là một dãy $3n$ chữ cái, mỗi chữ cái a, b , và c xuất hiện đúng n lần. Một phép *hoán đổi* là sự đổi vị trí của hai chữ cái liền kề trong một con tắc kè hoa. Chứng minh rằng đối với bất kỳ con tắc kè hoa X , tồn tại một con tắc kè hoa Y sao cho X không thể đổi thành Y bằng cách sử dụng ít hơn $3n^2/2$ phép hoán đổi.

C3. Ngài Alex chơi một trò chơi như sau trên một hàng 9 ô vuông. Ban đầu, tất cả các ô đều trống. Trong mỗi nước đi, ngài Alex được phép thực hiện đúng một trong hai thao tác sau:

- (1) Chọn bất kỳ số nào có dạng 2^j , trong đó j là một số nguyên không âm và đặt nó vào một ô trống.
- (2) Chọn hai ô (không nhất thiết liền kề) có cùng số trong đó, gọi là 2^j . Thay thế số ở một trong các ô bằng 2^{j+1} và xóa số ở ô còn lại.

Ở cuối trò chơi, một ô chứa 2^n , trong đó n là một số nguyên dương đã cho, trong khi các ô khác trống. Xác định số nước đi tối đa theo n mà ngài Alex có thể thực hiện.

(Thái Lan)

C4. Cho một số nguyên $N \geq 2$. Có một nhóm gồm $N(N+1)$ cầu thủ bóng đá, không có hai cầu thủ nào có cùng chiều cao, đứng thành một hàng. Ngài Alex muốn loại $N(N-1)$ cầu thủ ra khỏi hàng này để có một hàng mới gồm $2N$ cầu thủ thỏa mãn N điều kiện sau:

- (1) không ai đứng giữa hai cầu thủ cao nhất,
- (2) không ai đứng giữa cầu thủ cao thứ ba và thứ tư,
- $\vdots$
- (N) không có ai đứng giữa hai cầu thủ thấp nhất.

Chứng minh rằng ngài Alex có thể thực hiện được mong muốn của mình.

(IMO2017/5)

C5. Một người thợ săn và một con thỏ vô hình chơi một trò chơi trên mặt phẳng Euclid. Điểm xuất phát của con thỏ, A_0 , và điểm xuất phát của người thợ săn, B_0 giống nhau. Sau $n-1$ vòng của trò chơi, con thỏ ở điểm A_{n-1} và người thợ săn ở điểm B_{n-1} . Trong vòng thứ n của trò chơi, ba điều xảy ra theo thứ tự:

1. Con thỏ di chuyển một cách vô hình đến một điểm A_n sao cho khoảng cách giữa A_{n-1} và A_n là 1.
2. Thiết bị theo dõi báo cáo một điểm P_n cho thợ săn. Đảm bảo duy nhất mà thiết bị theo dõi cung cấp cho thợ săn là khoảng cách giữa P_n và A_n không vượt quá 1.
3. Người thợ săn di chuyển đến một điểm B_n sao cho khoảng cách giữa B_{n-1} và B_n là 1.

Có phải là luôn luôn có thể, bất kể con thỏ di chuyển như thế nào, và bất kể điểm nào được báo cáo bởi thiết bị theo dõi, để người thợ săn chọn nước đi của cô ấy sao cho sau 10^9 vòng, cô ấy có thể đảm bảo rằng khoảng cách giữa cô ấy và con thỏ không vượt quá 100?

(IMO2017/3)

C6. Cho số nguyên $n > 1$ và một khối lập phương $n \times n \times n$ hình thành bởi n^3 khối lập phương đơn vị. Mỗi khối lập phương đơn vị được sơn bằng một màu. Đối với mỗi hộp $n \times n \times 1$ gồm n^2 khối đơn vị (theo bất kỳ hướng nào trong ba hướng có thể), chúng ta xem xét tập hợp các màu có trong hộp đó (mỗi màu chỉ được liệt kê một lần). Bằng cách này, chúng ta nhận được $3n$ tập màu, được chia thành ba nhóm theo hướng.

Biết rằng đối với mọi tập hợp trong bất kỳ nhóm nào, tập hợp đó xuất hiện trong cả hai nhóm còn lại. Tìm theo n , số lượng màu tối đa có thể có.

C7. Với các tập hợp hữu hạn X và Y gồm các số nguyên dương, ký hiệu $f_X(k)$ là số nguyên dương bé nhất thứ k không có trong X và đặt

$$X * Y = X \cup \{f_X(y) : y \in Y\}.$$

Cho A là tập hợp gồm $a > 0$ các số nguyên dương và B là tập hợp gồm $b > 0$ các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $A * B = B * A$ thì

$$\underbrace{A * (A * \dots (A * (A * A)) \dots)}_{A \text{ xuất hiện } b \text{ lần}} = \underbrace{B * (B * \dots (B * (B * B)) \dots)}_{B \text{ xuất hiện } a \text{ lần}}.$$

(Mỹ)

C8. Cho số nguyên dương n . Trong mặt phẳng tọa độ, ban đầu mỗi điểm lưới có tọa độ không âm chứa một con bướm và không có con bướm nào khác. *Lân cận* của một điểm lưới c gồm tất cả các điểm lưới bên trong hình vuông lưới cỡ $(2n+1) \times (2n+1)$ có tâm c , ngoại trừ chính c . Ta gọi một con bướm là *cô đơn*, *đông đúc* hay *thoải mái*, tùy thuộc vào việc số lượng bướm trong lân cận N của nó tương ứng ít hơn, lớn hơn hoặc bằng một nửa số điểm lưới trong N . Mỗi phút, tất cả những con bướm cô đơn đồng loạt bay đi. Quá trình này diễn ra miễn là có bất kỳ con bướm cô đơn nào. Giả sử rằng quá trình cuối cùng dừng lại, xác định số lượng bướm thoải mái ở trạng thái cuối cùng.

3 Hình học

G1. Cho $ABCDE$ là một ngũ giác lồi sao cho $AB = BC = CD$, $\angle EAB = \angle BCD$, và $\angle EDC = \angle CBA$. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc từ E đến BC và các đoạn thẳng AC , BD đồng quy.

G2. Gọi R và S là các điểm khác nhau trên đường tròn Ω sao cho RS không phải là đường kính. Gọi ℓ là tiếp tuyến của Ω tại R . Điểm T được lấy sao cho S là trung điểm của đoạn thẳng RT . Điểm J được chọn trên cung RS nhỏ hơn của Ω sao cho đường tròn ngoại tiếp Γ của tam giác JST cắt ℓ tại hai điểm phân biệt. Gọi A là điểm chung của Γ và ℓ gần R hơn. Đường thẳng AJ cắt lại Ω tại K . Chứng minh rằng KT là một tiếp tuyến của Γ .

(IMO2017/4)

G3. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn ABC . Đường thẳng OA cắt các đường cao của ABC qua B và C lần lượt tại P và Q . Các đường cao cắt nhau tại H . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PQH nằm trên một trung tuyến của tam giác ABC .

G4. Trong tam giác ABC , gọi ω là đường tròn bàng tiếp góc A . Gọi D, E và F lần lượt là các điểm tại đó ω tiếp xúc với BC, CA và AB . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường thẳng BC tại P và Q . Gọi M là trung điểm của AD . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với ω .

G5. Cho $ABCC_1B_1A_1$ là một lục giác lồi sao cho $AB = BC$ và các đoạn thẳng AA_1, BB_1 và CC_1 có cùng một đường trung trực. Các đường chéo AC_1 và A_1C cắt nhau tại D , và ký hiệu ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Cho ω cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác A_1BC_1 tại $E \neq B$. Chứng minh rằng các đường thẳng BB_1 và DE giao nhau trên ω .

G6. Cho số nguyên $n > 2$. Hai n -giác đều $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ được cho trong mặt phẳng. Chứng minh rằng các đỉnh của $\mathcal{A}$ nằm bên trong $\mathcal{B}$ hoặc trên biên của nó là liên tiếp.

G7. Tứ giác lồi $ABCD$ có một đường tròn nội tiếp với tâm I . Gọi I_a, I_b, I_c và I_d lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác DAB, ABC, BCD và CDA . Giả sử rằng các tiếp tuyến chung ngoài của (AI_bI_d) và (CI_bI_d) cắt nhau tại X và các tiếp tuyến chung ngoài của (BI_aI_c) và (DI_aI_c) cắt nhau tại Y . Chứng minh rằng $\angle XIY = 90^\circ$.

G8. Có 2017 đường tròn ở ngoài nhau được vẽ trên bảng, sao cho không có hai đường tròn nào tiếp xúc với nhau và không có ba đường tròn nào có chung một tiếp tuyến. *Đoạn tiếp tuyến* là một đoạn thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn, bắt đầu tại một tiếp điểm và kết thúc tại tiếp điểm kia. Luciano đang vẽ các đoạn tiếp tuyến trên bảng đen, lần lượt từng đoạn một, sao cho không có đoạn tiếp tuyến nào cắt bất kỳ đường tròn nào khác hoặc các đoạn tiếp tuyến đã vẽ trước đó. Luciano tiếp tục vẽ các đoạn tiếp tuyến cho đến khi không vẽ được nữa. Tìm tất cả các số đoạn tiếp tuyến có thể có khi Luciano ngừng vẽ.

4 Số học

N1. Với số nguyên $a_0 > 1$, xét dãy số $(a_n)_{n \geq 0}$ được xác định bởi: Với mỗi số nguyên không âm n ,

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{nếu } \sqrt{a_n} \in \mathbb{Z} \\ a_n + 3, & \text{nếu } \sqrt{a_n} \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Tìm tất cả a_0 để tồn tại A thỏa mãn $a_n = A$ với vô hạn n .

(IMO2017/1)

N2. Cho số nguyên tố p . A và B chơi một trò chơi như sau: Họ luân phiên chơi. Đến lượt của mình, người chơi phải chọn một chỉ số $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ khác với các chỉ số đã chọn ở những lượt chơi trước, sau đó chọn $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Trò chơi kết thúc

nếu tất cả p chỉ số được chọn. Khi đó tính số $M = \sum_{i=1}^{p-1} a_i 10^i$. A thắng nếu $p|M$, nếu

không B sẽ thắng. Chứng minh rằng nếu A chơi trước thì A có cách để thắng.

N3. Tìm tất cả các số nguyên $n > 1$ có tính chất: Với n số nguyên bất kỳ $a_1, a_2, \dots, a_n$ có tổng không chia hết cho n , tồn tại chỉ số $1 \leq i \leq n$ sao cho không số nào trong các số

$$a_i, a_i + a_{i+1}, \dots, a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+n-1}$$

chia hết cho n (chỉ số được mở rộng theo modulo n).

N4. Một số hữu tỷ được gọi là *ngắn* nếu nó chỉ có hữu hạn chữ số trong biểu diễn thập phân. Với một số nguyên dương m , ta nói một số nguyên dương t là *m-tốt* nếu tồn tại $c \in \{1, 2, \dots, 2017\}$ sao cho $\frac{10^t - 1}{cm}$ là ngắn nhưng $\frac{10^k - 1}{cm}$ không ngắn với mỗi $1 \leq k < t$. Gọi $S(m)$ là tập tất cả các số *m-tốt*. Tìm $\max_{m \in \mathbb{N}^*} |S(m)|$.

N5. Tìm tất cả các số nguyên tố $p > q$ sao cho số $\frac{(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q} - 1}{(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q} - 1}$ là số nguyên.

N6. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất (nếu có) thỏa mãn: có vô hạn bộ n số hữu tỷ dương phân biệt $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sao cho cả hai số $\sum_{i=1}^n a_i$ và $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$ là số nguyên.

N7. Điểm nguyên (x_0, y_0) được gọi là *nguyên thủy* nếu $(x_0, y_0) = 1$. Cho tập S gồm hữu hạn điểm nguyên thủy. Chứng minh tồn tại số nguyên dương n và các số nguyên a_i sao cho

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 1, \quad \forall (x, y) \in S.$$

(IMO2017/6)

N8. Cho số nguyên tố lẻ p và hàm số $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \{0, 1\}$ có các tính chất:

- (1) $f(1, 1) = 0$.
(2) Nếu $a \neq b$ là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì

$$f(a, b) + f(b, a) = 1.$$

- (3) Nếu a, b là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì

$$f(a + b, b) = f(a, b).$$

Chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{p-1} f(n^2, p) \geq \sqrt{2p} - 2$.