

IMO 2015: Shortlisted Problems

Nguyễn Trung Tuân

THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam và T's Lab.

Tóm tắt nội dung

Trong tài liệu này chúng tôi sẽ giới thiệu các bài toán trong cuốn **IMO 2015: Shortlisted Problems**.

Mọi góp ý và thảo luận xin gửi về

Nguyễn Trung Tuân

THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam và T's Lab

Email: math@nttuan.org

Điện thoại: 0915011235

Mục lục

1	Đại số	2
2	Tổ hợp	3
3	Hình học	5
4	Số học	7

1 Đại số

A1. Dãy $a_1, a_2, \dots$ các số thực dương thỏa mãn

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

với mọi số nguyên dương k . Chứng minh rằng $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ với mọi $n \geq 2$.

A2. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

A3. Cho số nguyên dương n . Tìm giá trị lớn nhất của

$$\sum_{1 \leq r < s \leq 2n} (s - r - n)x_r x_s,$$

ở đây $-1 \leq x_i \leq 1$ với mỗi $i = 1, \dots, 2n$.

A4. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(IMO2015/5)

A5. Kí hiệu $2\mathbb{Z} + 1$ là tập các số nguyên lẻ. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z} + 1$ sao cho

$$f(x + f(x) + y) + f(x - f(x) - y) = f(x + y) + f(x - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

A6. Cho số nguyên $n \geq 2$. Ta nói hai đa thức P, Q với hệ số nguyên là *đồng dạng khối* nếu với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, hai dãy

$$P(2015i), P(2015i - 1), \dots, P(2015i - 2014)$$

và

$$Q(2015i), Q(2015i - 1), \dots, Q(2015i - 2014)$$

là hoán vị của nhau.

- (a) Chứng minh rằng tồn tại hai đa thức đồng dạng khối, khác nhau và có bậc $n + 1$;
- (b) Chứng minh rằng không tồn tại hai đa thức đồng dạng khối, khác nhau và có bậc n .

2 Tổ hợp

C1. Ở Lineland có $n \geq 1$ thị trấn, được sắp xếp dọc một con đường từ trái sang phải. Mỗi thị trấn có một *xe ủi trái* (đặt bên trái của thị trấn và hướng sang trái) và một *xe ủi phải* (đặt bên phải của thị trấn và hướng sang phải). Kích thước của $2n$ xe ủi là đôi một khác nhau. Tại mỗi thời điểm khi một xe ủi trái đối diện một xe ủi phải, xe lớn hơn sẽ đẩy xe nhỏ hơn ra khỏi đường. Mặt khác, các xe ủi sẽ không được bảo vệ đằng sau; vì vậy, nếu một xe ủi húc vào đuôi của xe khác thì nó sẽ đẩy xe bị húc ra khỏi đường. Cho A và B là hai thị trấn, với B nằm bên phải A . Ta nói A có thể *quét B biến mất* nếu xe ủi phải của A có thể di chuyển đến B và đẩy tất cả xe ủi mà nó gặp ra khỏi đường. Tương tự, B có thể quét A biến mất nếu xe ủi trái của B có thể di chuyển tới A và đẩy tất cả xe ủi mà nó gặp ra khỏi đường. Chứng minh rằng có đúng một thị trấn không bị quét biến mất bởi mỗi thị trấn còn lại.

C2. Ta nói tập hữu hạn $\mathcal{S}$ các điểm trong mặt phẳng là *cân bằng* nếu với mỗi hai điểm khác nhau A và B trong $\mathcal{S}$, tồn tại C trong $\mathcal{S}$ sao cho $AC = BC$. Ta nói $\mathcal{S}$ là *không tâm* nếu với mỗi ba điểm phân biệt A , B và C của $\mathcal{S}$, không tồn tại P trong $\mathcal{S}$ sao cho $PA = PB = PC$.

(a) Chứng minh rằng với mỗi $n \geq 3$, tồn tại tập cân bằng chứa n điểm.

(b) Xác định tất cả $n \geq 3$ sao cho tồn tại tập cân bằng và không tâm chứa n điểm.

(IMO2015/1)

C3. Với tập hữu hạn các số nguyên dương A , một phân hoạch của A thành hai tập con khác rỗng A_1 , A_2 được gọi là *tốt* nếu bội chung nhỏ nhất của các phần tử trong A_1 bằng ước chung lớn nhất của các phần tử trong A_2 . Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho tồn tại tập gồm n số nguyên dương với đúng 2015 phân hoạch tốt.

C4. Cho số nguyên dương n . Hai người chơi A và B chơi một trò chơi chọn các số nguyên dương $k \leq n$. Luật chơi là:

(i) Người chơi không được chọn số đã được chọn ở các bước trước.

(ii) Người chơi không được chọn số liên tiếp với các số đã được người đó chọn ở các bước trước.

(iii) Trò chơi sẽ kết thúc với kết quả hòa nếu không còn số nào để chọn; trong trường hợp còn lại, ai không chọn được sẽ thua.

A đi trước. Xác định kết quả của trò chơi, giả sử rằng cả hai cùng chơi giỏi.

C5. Cho dãy các số nguyên $a_1, a_2, \dots$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

(i) $1 \leq a_j \leq 2015$ với mỗi $j \geq 1$,

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ với mỗi $1 \leq k < \ell$.

Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên dương b và N sao cho

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

với mỗi hai số m và n thỏa mãn $n > m \geq N$.

(IMO2015/6)

C6. Cho S là tập khác rỗng các số nguyên dương. Một số nguyên dương được gọi là *dọn đẹp* nếu nó có thể biểu diễn duy nhất thành tổng của một số lẻ các phân tử khác nhau của S . Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương không dọn đẹp.

C7. Trong một công ty có một số cặp là kẻ thù của nhau. Một nhóm người được gọi là *không ưa giao tiếp* nếu số thành viên trong nhóm là số lẻ lớn hơn 1, và có thể sắp xếp tất cả các thành viên của nhóm xung quanh một bàn tròn sao cho mỗi cặp ngồi cạnh nhau đều là kẻ thù của nhau. Biết có nhiều nhất 2015 nhóm không ưa giao tiếp, chứng minh rằng có thể chia công ty thành 11 phần sao cho trong mỗi phần không có hai người nào là kẻ thù của nhau.

3 Hình học

G1. Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H . Gọi G là điểm sao cho $ABGH$ là một hình bình hành. Gọi I là điểm trên đường thẳng GH sao cho AC chia đôi HI . Giả sử đường thẳng AC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GCI tại C và J . Chứng minh $IJ = AH$.

G2. Tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp Ω và tâm đường tròn ngoại tiếp O . Một đường tròn Γ tâm A cắt đoạn BC tại D và E sao cho B, D, E , và C khác nhau và nằm trên BC theo thứ tự này. Cho F và G là giao điểm của Γ và Ω sao cho A, F, B, C , và G nằm trên Ω theo thứ tự này. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF và đoạn AB . Gọi L là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác CGE và đoạn CA . Giả sử FK và GL cắt nhau tại X . Chứng minh rằng X thuộc AO .

(IMO2015/4)

G3. Cho tam giác ABC với $\angle C = 90^\circ$, và H là chân đường cao qua C . Chọn điểm D bên trong tam giác CBH sao cho CH chia đôi AD . Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng BD và CH . Gọi ω là nửa đường tròn đường kính BD cắt đoạn CB tại một điểm nằm trong. Một đường thẳng qua P tiếp xúc với ω tại Q . Chứng minh CQ và AD cắt nhau trên ω .

G4. Cho tam giác nhọn ABC và M là trung điểm của AC . Một đường tròn ω qua B và M cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại P và Q . Gọi T là điểm sao cho $BPTQ$ là một hình bình hành. Giả sử rằng T nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Tính $\frac{BT}{BM}$.

G5. Cho tam giác ABC với $CA \neq CB$. Gọi D, F , và G lần lượt là trung điểm của AB, AC , và BC . Một đường tròn Γ qua C và tiếp xúc với AB tại D cắt đoạn AF và đoạn BG lần lượt tại H và I . Các điểm H' và I' đối xứng với H và I qua F và G , tương ứng. Đường thẳng $H'I'$ cắt CD và FG lần lượt tại Q và M . Đường thẳng CM cắt Γ lần hai tại P . Chứng minh $CQ = QP$.

G6. Cho tam giác nhọn ABC với $AB > AC$. Gọi Γ là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm, và F là chân đường cao qua A của tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC . Gọi Q là điểm trên Γ sao cho $\angle HQA = 90^\circ$ và K là điểm trên Γ sao cho $\angle HKQ = 90^\circ$. Giả sử rằng A, B, C, K và Q khác nhau và nằm trên Γ theo thứ tự này. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác KQH tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác FKM .

(IMO2015/3)

G7. Cho $ABCD$ là một tứ giác lồi, và P, Q, R, S là các điểm nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA , tương ứng. Cho các đoạn PR, QS cắt nhau tại O . Giả sử mỗi tứ giác $APOS, BQOP, CROQ, DSOR$ là tứ giác ngoại tiếp. Chứng minh AC, PQ, RS đồng quy hoặc song song đôi một.

G8. Một tam giác hóa của một đa giác lồi Π là một phân hoạch của Π thành các

tam giác bởi các đường chéo không có điểm trong chung. Ta nói một tam giác hóa là một *tam giác hóa Thái Lan* nếu tất cả các tam giác có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng mỗi hai tam giác hóa Thái Lan phân biệt của một đa giác lồi Π khác nhau đúng hai tam giác.

4 Số học

N1. Tìm tất cả các số nguyên dương M sao cho dãy $a_0, a_1, a_2, \dots$ xác định bởi $a_0 = M + \frac{1}{2}$ và $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$ với $k = 0, 1, 2, \dots$ chứa ít nhất một số nguyên.

N2. Cho các số nguyên dương a và b sao cho $a! + b!$ chia hết $a!b!$. Chứng minh $3a \geq 2b + 2$.

N3. Cho m và n là các số nguyên dương sao cho $m > n$. Định nghĩa $x_k = \frac{m+k}{n+k}$ với $k = 1, 2, \dots, n+1$. Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ là các số nguyên thì $x_1 x_2 \dots x_{n+1} - 1$ chia hết cho một số nguyên tố lẻ.

N4. Cho $a_0, a_1, \dots$ và $b_0, b_1, \dots$ là hai dãy các số nguyên dương thỏa mãn $a_0, b_0 \geq 2$ và

$$a_{n+1} = \gcd(a_n, b_n) + 1, \quad b_{n+1} = \text{lcm}(a_n, b_n) - 1.$$

Chứng minh dãy a_n là hằng kể từ lúc nào đó.

N5. Tìm tất cả các bộ ba (a, b, c) các số nguyên dương sao cho

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

là các lũy thừa của 2.

(IMO2015/2)

N6. Cho $\mathbb{Z}_{>0}$ là tập các số nguyên dương. Xét hàm số $f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$. Với mỗi $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ta viết $f^n(m) = \underbrace{f(f(\dots f(m) \dots))}_n$. Biết f có các tính chất:

(i) Nếu $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ thì $\frac{f^n(m) - m}{n} \in \mathbb{Z}_{>0}$;

(ii) Tập $\mathbb{Z}_{>0} \setminus \{f(n) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ là hữu hạn.

Chứng minh rằng dãy $f(1) - 1, f(2) - 2, f(3) - 3, \dots$ là dãy tuần hoàn.

N7. Cho $\mathbb{Z}_{>0}$ là tập các số nguyên dương. Với mỗi số nguyên dương k , một hàm số $f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ được gọi là k -tốt nếu $\gcd(f(m) + n, f(n) + m) \leq k$ với mỗi $m \neq n$. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho tồn tại hàm k -tốt.

N8. Với mỗi số nguyên dương n với phân tích nguyên tố $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, định nghĩa

$$\mathcal{U}(n) = \sum_{i: p_i > 10^{100}} \alpha_i.$$

Tìm tất cả các hàm tăng ngặt $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho

$$\mathcal{U}(f(a) - f(b)) \leq \mathcal{U}(a - b)$$

với mỗi hai số nguyên $a > b$.