

IMO 2014: Shortlisted Problems

Nguyễn Trung Tuân

THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam và T's Lab.

Tóm tắt nội dung

Trong tài liệu này chúng tôi sẽ giới thiệu các bài toán trong cuốn **IMO 2014: Shortlisted Problems**.

Mọi góp ý và thảo luận xin gửi về

Nguyễn Trung Tuân

THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam và T's Lab

Email: math@nttuan.org

Điện thoại: 0915011235

Mục lục

1	Đại số	2
2	Tổ hợp	3
3	Hình học	5
4	Số học	6

1 Đại số

A1. Cho $z_0 < z_1 < z_2 < \dots$ là một dãy vô hạn các số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số nguyên dương n sao cho

$$z_n < \frac{z_0 + z_1 + \dots + z_n}{n} \leq z_{n+1}.$$

(IMO 2014/1)

A2. Cho hàm số $f : (0; 1) \rightarrow (0; 1)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x < \frac{1}{2} \\ x^2, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$ Cho a

và b là hai số thực thỏa mãn $0 < a < b < 1$. Xét hai dãy (a_n) và (b_n) xác định bởi $a_0 = a, b_0 = b$ và $a_n = f(a_{n-1}), b_n = f(b_{n-1})$ với $n > 0$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0.$$

A3. Với dãy các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$, ta gọi

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_1 + x_2 + \dots + x_i|$$

là *giá* của nó. Cho n số thực, Alpha và Beta muốn xếp chúng thành một dãy sao cho giá của nó nhỏ. Alpha chăm chỉ kiểm tra tất cả các cách xếp có thể và chọn cách xếp có giá nhỏ nhất D . Beta làm như sau, chọn x_1 sao cho $|x_1|$ nhỏ nhất; trong những số còn lại, anh ấy chọn x_2 sao cho $|x_1 + x_2|$ nhỏ nhất, và cứ thế. Trong mỗi bước, nếu nhiều số có thể chọn thì anh ấy chọn ngẫu nhiên một số. Cuối cùng Beta được một dãy với giá T .

Tìm hằng số c nhỏ nhất sao cho với mỗi số nguyên dương n , với mỗi n số thực, và mỗi dãy có thể hình thành từ cách làm của Beta, các giá thỏa mãn bất đẳng thức $T \leq cD$.

A4. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(f(m) + n) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2014, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

A5. Xét tất cả các đa thức P với hệ số thực thỏa mãn

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |y^2 - P(x)| \leq 2|x| \Leftrightarrow |x^2 - P(y)| \leq 2|y|.$$

Xác định tất cả các giá trị có thể của $P(0)$.

A6. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$n^2 + 4f(n) = f(f(n))^2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

2 Tổ hợp

C1. Cho n điểm nằm trong một hình chữ nhật R sao cho không có hai điểm nào nằm trên một đường thẳng song song với cạnh của R . Hình chữ nhật R được chia thành các hình chữ nhật con có các cạnh song song với các cạnh của R sao cho không có hình chữ nhật con nào chứa một trong các điểm đã cho ở bên trong. Chứng minh rằng số các hình chữ nhật con không ít hơn $n + 1$.

C2. Cho 2^m mảnh giấy, trên mỗi mảnh giấy có viết số 1. Xét phép toán sau: Ở mỗi bước ta chọn ra hai mảnh giấy phân biệt; nếu các số trên chúng là a và b thì chúng ta xóa chúng đi và viết số $a + b$ trên cả hai mảnh. Chứng minh rằng sau $m2^{m-1}$ bước, tổng các số trên tất cả các mảnh lớn hơn hay bằng 4^m .

C3. Cho số nguyên $n > 1$. Xét một bàn cờ cỡ $n \times n$. Ta gọi một hình với n quân xe trên bàn cờ là *vui vẻ* nếu trên mỗi hàng và mỗi cột có đúng một quân xe. Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho với mỗi hình vui vẻ, ta có thể tìm một bàn cờ con cỡ $k \times k$ không chứa quân xe nào.

(IMO 2014/2)

C4. Dùng một tetromino bởi dán hai 2×1 domino dọc theo cạnh của chúng sao cho trung điểm của cạnh dài của một domino là một góc của domino còn lại. Phép dùng này dẫn đến hai kiểu tetromino có hướng ngược nhau. Ta gọi chúng là S - và Z -tetromino, tương ứng. Giả sử một đa giác lưới P có thể được lát bởi các S -tetromino. Chứng minh rằng trong mỗi cách lát P chỉ sử dụng S - và Z -tetromino, số Z -tetromino là số chẵn.

(Tamas Fleiner và Peter Pal Pach)

C5. Một tập các đường thẳng trong mặt phẳng được gọi là ở vị trí tổng quát nếu không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Một tập các đường thẳng ở vị trí tổng quát chia mặt phẳng thành các miền, một số trong chúng có diện tích hữu hạn, được gọi là *miền hữu hạn*. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n đủ lớn, trong mỗi tập n đường thẳng ở vị trí tổng quát, có thể tô màu ít nhất $\sqrt{n}$ đường thẳng bởi màu xanh sao cho không miền hữu hạn nào có biên hoàn toàn xanh.

(IMO 2014/6)

C6. Chúng ta được đưa cho một bộ bài vô hạn, mỗi bộ bài có một số thực trên đó. Đối với mỗi số thực x , có đúng một quân bài trong bộ bài có viết x trên đó. Bây giờ, hai người chơi rút các bộ bài A và B , mỗi bộ gồm 100 quân bài từ bộ bài này. Chúng ta muốn xác định một quy tắc tuyên bố một trong số họ là người chiến thắng. Quy tắc này phải đáp ứng các điều kiện sau:

1. Người chiến thắng chỉ phụ thuộc vào thứ tự tương đối của các quân bài 200: nếu các quân bài được đặt úp xuống theo thứ tự tăng dần và chúng ta được biết quân bài nào thuộc về người chơi nào, chứ không phải con số nào được viết trên đó, chúng ta vẫn có thể quyết định người chiến thắng.
2. Nếu chúng ta viết các phần tử của cả hai tập hợp theo thứ tự tăng dần là $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$ và $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{100}\}$ và $a_i > b_i$ với tất cả i , thì A đánh bại B .

3. Nếu ba người chơi rút ba bộ khác nhau A, B, C từ bộ bài, A thắng B và B thắng C thì A cũng thắng C .

Có bao nhiêu cách để xác định một quy tắc như vậy? Ở đây, chúng ta coi hai quy tắc là khác nhau nếu tồn tại hai bộ A và B sao cho A thắng B theo một quy tắc, nhưng B thắng A theo quy tắc còn lại.

(Ilya Bogdanov)

C7. Cho M là tập hợp $n \geq 4$ điểm trên mặt phẳng, không có ba điểm nào thẳng hàng. Ban đầu, các điểm này được nối với nhau bởi n đoạn thẳng sao cho mỗi điểm trong M là điểm cuối của đúng hai đoạn. Sau đó, tại mỗi bước, người ta có thể chọn hai đoạn AB và CD có chung một điểm bên trong và thay thế chúng bằng các đoạn AC và BD nếu không có đoạn nào trong số chúng hiện diện tại thời điểm này. Chứng minh rằng không thể thực hiện $n^3/4$ hoặc nhiều nước đi như vậy.

(Vladislav Volkov)

C8. Cho một bộ bài gồm 1024 quân bài. Trên mỗi quân bài, một tập hợp các chữ số thập phân khác nhau được viết theo cách đảm bảo không có hai tập hợp nào bằng nhau (do đó, một trong các quân bài là trống). Hai người chơi luân phiên lấy các quân bài từ bộ bài, mỗi lượt một quân bài. Sau khi bộ bài trống, mỗi người chơi kiểm tra xem anh ta có thể rút một trong các quân bài của mình ra sao cho mỗi chữ số trong số mười chữ số xuất hiện trên một số chẵn các quân bài còn lại của anh ta hay không. Nếu một người chơi làm được điều này mà người kia không làm được thì người làm được là người chiến thắng; nếu không thì có một trận hòa. Xác định tất cả các nước đi đầu tiên có thể có của người chơi đầu tiên mà sau đó anh ta có một chiến lược chiến thắng.

(Ilya Bogdanov và Vladimir Bragin)

C9. Có n đường tròn được vẽ trên một tờ giấy sao cho hai đường tròn bất kỳ cắt nhau tại hai điểm và không có ba đường tròn nào đi qua cùng một điểm. Một con kiến bò dọc theo các đường tròn theo cách sau. Ban đầu nó di chuyển trên một trong các đường tròn theo chiều kim đồng hồ. Con kiến luôn tiếp tục di chuyển dọc theo vòng tròn hiện tại cho đến khi đến giao lộ với một vòng tròn khác. Sau đó, nó tiếp tục hành trình của mình trên vòng tròn mới này và cũng thay đổi hướng di chuyển, tức là từ theo chiều kim đồng hồ sang ngược chiều kim đồng hồ hoặc ngược lại. Giả sử rằng đường đi của con kiến bao phủ hoàn toàn tất cả các đường tròn. Chứng minh rằng n phải là số lẻ.

(Tejaswi Navilarekallu)

3 Hình học

G1. Các điểm P, Q nằm trên cạnh BC của tam giác nhọn ABC sao cho $\widehat{PAB} = \widehat{ACB}$ và $\widehat{QAC} = \widehat{CBA}$. Các điểm M, N lần lượt nằm trên các tia AP, AQ sao cho $AP = PM$ và $AQ = QN$. Chứng minh rằng các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

(IMO 2014/4)

G2. Cho tam giác ABC . Các điểm K, L, M lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho AK, BL, CM đồng quy. Chứng minh rằng có thể chọn hai trong ba tam giác ALM, BMK, CKL sao cho tổng các bán kính đường tròn nội tiếp của hai tam giác này lớn hơn hoặc bằng bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .

G3. Cho Ω và O là đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác nhọn ABC với $AB > BC$. Tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$ cắt Ω tại $M \neq B$. Gọi Γ là đường tròn đường kính BM . Các tia phân giác của các góc $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}$ cắt Γ tại P, Q tương ứng. Điểm R nằm trên đường thẳng PQ sao cho $BR = MR$. Chứng minh rằng $BR \parallel AC$.

G4. Cho số thực $\lambda \in (0; 1)$. Xét một đường tròn cố định Γ với ba điểm cố định A, B, C nằm trên nó. Gọi P là một điểm di động trên Γ , P khác A, B, C . M là điểm trên đoạn thẳng CP sao cho $CM = \lambda CP$. Gọi Q là giao điểm thứ hai của $(AMP), (BMC)$. Chứng minh rằng Q nằm trên một đường tròn cố định.

G5. Cho tứ giác lồi $ABCD$ với $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi H là hình chiếu của A trên BD . Các điểm S, T lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD sao cho H nằm trong tam giác SCT và

$$\widehat{SHC} - \widehat{BSC} = 90^\circ, \quad \widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90^\circ.$$

Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của (SHT) .

(IMO 2014/3)

G6. Cho tam giác nhọn ABC . Xét các điểm E, F nằm trên các cạnh AC, AB tương ứng, và M là trung điểm của EF . Đường trung trực của EF cắt BC tại K , đường trung trực của MK cắt các đường thẳng AC, AB tại S, T tương ứng. Ta gọi (E, F) là *tốt* nếu $KSAT$ nội tiếp. Giả sử $(E_1, F_1), (E_2, F_2)$ là tốt. Chứng minh rằng $\frac{E_1E_2}{AB} = \frac{F_1F_2}{AC}$.

G7. Cho tam giác ABC với đường tròn ngoại tiếp Ω và tâm đường tròn nội tiếp I . Đường thẳng đi qua I vuông góc với CI cắt cạnh BC và cung BC (không chứa A) của Ω tại các điểm U và V tương ứng. Đường thẳng qua U song song với AI cắt AV tại X , đường thẳng qua V song song với AI cắt AB tại Y . Gọi W, Z lần lượt là trung điểm của AX, BC . Chứng minh rằng nếu I, X, Y thẳng hàng thì I, W, Z cũng thẳng hàng.

4 Số học

N1. Cho số nguyên $n \geq 2$, và A_n là tập hợp cho bởi

$$A_n = \{2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < n\}.$$

Xác định số nguyên dương lớn nhất không thể viết thành tổng của một hoặc một vài phần tử (không nhất thiết phân biệt) của A_n .

N2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho

$$\sqrt[3]{7x^2 - 13xy + 7y^2} = |x - y| + 1.$$

N3. Với mỗi số nguyên dương n , ngân hàng phát hành các đồng xu với mệnh giá $\frac{1}{n}$. Cho một họ hữu hạn các đồng xu như vậy (không nhất thiết các đồng xu có mệnh giá khác nhau) sao cho tổng các mệnh giá của các đồng xu không vượt quá $99 + \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng có thể chia họ này thành không quá 100 nhóm, sao cho tổng mệnh giá của các đồng xu trong mỗi nhóm không vượt quá 1.

(IMO 2014/5)

N4. Cho số nguyên $n > 1$ và dãy số $(a_k)_{k \geq 1}$ xác định bởi

$$a_k = \left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor, \quad \forall k \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy số $(a_k)_{k \geq 1}$ chứa vô hạn số hạng lẻ.

N5. Tìm tất cả các số nguyên tố p và các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $x^{p-1} + y$ và $x + y^{p-1}$ đều là các lũy thừa của p .

(Bỉ)

N6. Cho $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ là các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau sao cho a_1 là số nguyên tố và $a_1 \geq n + 2$. Trên đoạn $I = [0, a_1 a_2 \dots a_n]$ của trục số, đánh dấu tất cả các số nguyên chia hết cho ít nhất một trong các số $a_1, a_2, \dots, a_n$. Các điểm này chia I thành các đoạn nhỏ hơn. Chứng minh rằng tổng bình phương của các độ dài của các đoạn đó chia hết cho a_1 .

(Serbia)

N7. Cho số nguyên dương c . Xét dãy số $(a_n)_{n \geq 1}$ xác định bởi $a_1 = c$ và

$$a_{n+1} = a_n^3 - 4c \cdot a_n^2 + 5c^2 \cdot a_n + c, \quad \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$, tồn tại số nguyên tố p chia hết a_n nhưng không chia hết cho số nào trong các số $a_1, \dots, a_{n-1}$.

N8. Với mỗi số thực x , ký hiệu $\|x\|$ là khoảng cách giữa x và số nguyên gần nhất.

Chứng minh rằng với mỗi cặp số nguyên dương (a, b) , tồn tại số nguyên tố lẻ p và số nguyên dương k sao cho

$$\left\| \frac{a}{p^k} \right\| + \left\| \frac{b}{p^k} \right\| + \left\| \frac{a+b}{p^k} \right\| = 1.$$