

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài I (5 điểm).

Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ có đồ thị (C) .

- a) Tìm các điểm M, N cùng nằm trên (C) sao cho điểm $I\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng MN .
- b) Cho ba điểm phân biệt A, B, C cùng thuộc (C) . Các tiếp tuyến của (C) tại A, B, C cắt (C) tại điểm thứ hai lần lượt là A', B', C' . Chứng minh rằng: Nếu A, B, C thẳng hàng thì A', B', C' cũng thẳng hàng.

Bài II (5 điểm).

- a) Giải phương trình: $2x^2 + 2x + 5 = (4x - 1)\sqrt{x^2 + 3}$.
- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \\ 2\sqrt{4 - x^2} - 3\sqrt{3 + 2y - y^2} - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

Bài III (2 điểm).

Cho các số thực a, b, c sao cho $a \geq 0, b \geq 0, 0 \leq c \leq 1$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = 2ab + 3bc + 3ca + \frac{6}{a + b + c}.$$

Bài IV (5 điểm).

Trong không gian cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Đặt $\widehat{xOy} = \alpha, \widehat{yOz} = \beta, \widehat{zOx} = \gamma$. Lấy các điểm A, B, C lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $OA = OB = OC = a$ với $a > 0$.

- a) Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $BM = 2MC$ và I là trung điểm của đoạn thẳng AM . Tính độ dài đoạn thẳng OI theo a trong trường hợp $\alpha = \gamma = 60^\circ, \beta = 90^\circ$.
- b) Chứng minh rằng: $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > -\frac{3}{2}$.

Bài V (3 điểm).

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2014} + \frac{2013}{2014}u_n, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- a) Chứng minh rằng (u_n) là dãy số tăng.
- b) Với mỗi $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, đặt $v_n = \frac{u_n}{u_{n+1} - 1}$. Chứng minh rằng:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n < 2014 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

----- HẾT -----

Họ tên thí sinh: Phòng thi: Số báo danh