

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2025-2026

Ngày thi thứ nhất: 22 tháng 9 năm 2025

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 9$ và $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

- Chứng minh (u_n) là một dãy số tăng.
- Xét dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = \frac{1}{u_1+1} + \frac{1}{u_2+1} + \dots + \frac{1}{u_n+1}$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Bài 2 (5,0 điểm). Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên có bậc bằng 2026 thỏa mãn: $P(x)$ không phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng nếu r là một nghiệm thực của $P(x)$ thì $5r + 8$ không là nghiệm của $P(x)$.

Bài 3 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC < BC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi CD là đường kính của đường tròn (O) . Đường thẳng đối xứng với đường thẳng BA qua đường thẳng BD cắt đường thẳng CD tại điểm E . Đường thẳng AC cắt đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABE tại điểm thứ hai F .

- Chứng minh tam giác FBC là một tam giác cân.
- Gọi H là giao điểm của đường thẳng BD và đường thẳng EA , I là giao điểm của đường thẳng AD và đường thẳng EB . Gọi K là giao điểm của đường thẳng HI và đường thẳng AB , J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE . Tia đối của tia OJ cắt đường tròn ngoại tiếp của tam giác CDK tại điểm L . Chứng minh $OL = 2OJ$.

Bài 4 (4,0 điểm). Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; \dots; 2025\}$ gồm 2025 số nguyên dương đầu tiên. Xét một tập con M của tập hợp S có nhiều hơn một phần tử thỏa mãn: với mỗi $a, b \in M$, nếu $2b - a \in S$ thì $2b - a \in M$.

Gọi k là số phần tử của tập hợp M . Chứng minh tồn tại k tập hợp khác rỗng $A_1, A_2, \dots, A_k$ là các tập con của tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$ và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- $\bigcup_{i=1}^k A_i = \mathbb{N}$ và $A_i \cap A_j = \emptyset$, với mọi $i, j \in \{1; 2; \dots; k\}$, $i \neq j$.
- Với mỗi $a, b \in M$ tồn tại $i, j \in \{1; 2; \dots; k\}$ sao cho $\{a + x \mid x \in A_i\} = \{b + y \mid y \in A_j\}$.

Thời gian: 180 phút.

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2025-2026

Ngày thi thứ hai: 23 tháng 9 năm 2025

Bài 5 (5,0 điểm). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + f(y)) + xf(y) = yf(x) + f(2x) + 2$$

với mọi số thực x và y .

Bài 6 (4,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có đường cao AD . Trên đoạn thẳng AD lấy điểm K (K khác A và D), trên đoạn thẳng DC lấy điểm M (M khác D và C). Tia BK cắt đoạn thẳng AC tại điểm E và tia CK cắt đoạn thẳng AB tại điểm F . Đường thẳng EF cắt các đường thẳng AM , MK và AD lần lượt tại các điểm G , I và H . Đường trung trực của đoạn thẳng HD cắt đường thẳng EF tại điểm T . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AEF , AIG và THD cùng đi qua một điểm.

Bài 7 (6,0 điểm). Xét một đa thức $f(x)$ với hệ số hữu tỉ có bậc lớn hơn hoặc bằng 1 thỏa mãn: với mỗi số nguyên dương n , tồn tại số hữu tỉ r_n khác n sao cho $f(r_n) = f(n)$.

- Chứng minh bậc của $f(x)$ là số nguyên dương chẵn và tồn tại hằng số c sao cho $|r_n| \leq c \cdot n$ với mọi số nguyên dương n .
- Chứng minh tồn tại số hữu tỉ q sao cho $f(x) = f(q - x)$ với mọi số hữu tỉ x .

Bài 8 (5,0 điểm). Với mỗi số nguyên dương x , ký hiệu $v_2(x)$ là số nguyên không âm y lớn nhất sao cho x chia hết cho 2^y .

Cho 100 số nguyên dương đôi một khác nhau $a_1, a_2, \dots, a_{100}$. Gọi S là tập hợp tất cả số nguyên không âm m sao cho tồn tại $i \in \{1; 2; \dots; 100\}$ để $m = v_2(a_i)$.

Chứng minh rằng $S = \{0; 1; 2; \dots; 99\}$ khi và chỉ khi với mỗi số nguyên k , tồn tại các số $b_1, b_2, \dots, b_{100}$ thuộc tập hợp $\{0; 1\}$ sao cho

$$k \equiv b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_{100} a_{100} \pmod{2^{100}}.$$

Thời gian: 180 phút.