

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2024-2025

Ngày thi thứ nhất: 11/10/2024

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số $(u_n)_{n \geq 1}$ xác định bởi $u_1 = \frac{1}{2}$ và

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + \sqrt{4u_n^2 + 3}}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy số $(\sqrt[n]{u_n})_{n \geq 2}$ có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Bài 2 (5,0 điểm). Tìm tất cả cặp số nguyên tố (p, q) sao cho tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn $n^{|p-q|} + 1$ chia hết cho pq .

Bài 3 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có đường cao AD . Gọi E là một điểm trên cạnh AB (E khác A và B). Đường thẳng CE cắt đường thẳng AD tại điểm M . Gọi X là một điểm thay đổi trên tia đối của tia ED và Y là điểm đối xứng với X qua đường thẳng AD .

- Chứng minh ba đường thẳng AC , BM và DY cùng đi qua một điểm.
- Gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDX và đường tròn ngoại tiếp tam giác CDY . Chứng minh P nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 4 (4,0 điểm). Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Gọi S là tập hợp tất cả số tự nhiên có 100 chữ số được thành lập từ các chữ số thuộc tập hợp A , sao cho trong mỗi số thuộc S hai chữ số kề nhau bất kì là hai số tự nhiên liên tiếp. Tìm số dư khi chia số phần tử của S cho 4.

Thời gian: 180 phút.

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2024-2025

Ngày thi thứ hai: 12/10/2024

Bài 5 (6,0 điểm). Xét hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 - y - 4f(y)) = (f(x))^2 - 5y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Chứng minh $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
b) Chứng minh $f(x) = x$ với mọi số thực x .

Bài 6 (7,0 điểm). Cho $A(x)$ là một đa thức với hệ số thực. Chứng minh tồn tại hai đa thức $B(x)$ và $C(x)$ với hệ số thực sao cho

$$B(C(x)) + C(B(x)) = A(x).$$

Bài 7 (7,0 điểm). Cho số nguyên $n > 5$ và tập hợp $S = \{2n^2 - n + 1, 2n^2 - n + 2, \dots, 2n^2 + 2n\}$ gồm $3n$ số nguyên liên tiếp. Chứng minh với hai số nguyên phân biệt a và b bất kì thuộc khoảng $(n; 2n)$, tồn tại số nguyên dương k và các phần tử $c_1, c_2, \dots, c_k$ (không nhất thiết phân biệt) của S sao cho số

$$\frac{c_1 c_2 \dots c_k}{ab}$$

là bình phương của một số nguyên.

Thời gian: 180 phút.