

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2023-2024

Ngày thi thứ nhất: 21/10/2023

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số nguyên (u_n) xác định bởi $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ và

$$u_{n+2} = 3(n+1)u_{n+1} - 2n(n+1)u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) Xét dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = \frac{2^n}{u_n}$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.
- b) Tìm tất cả các số nguyên tố p thỏa mãn $u_p + 15^{u_{2p}}$ chia hết cho p .

Bài 2 (5,0 điểm). Cho đa thức $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-2023)$. Chứng minh đa thức

$$Q(x) = P^2(x) + P(x) + 1$$

không phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi P là điểm đối xứng với A qua đường thẳng BC . Đường thẳng AP cắt (O) tại điểm thứ hai D . Một đường thẳng song song với BC cắt cung nhỏ AB , AC của đường tròn (O) lần lượt tại K, Q . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng PK . Đường thẳng qua M vuông góc với MC cắt đường thẳng DB tại L . Chứng minh đường thẳng OL song song với đường thẳng DQ .

Bài 4 (5,0 điểm). Cho S là một tập hợp gồm 172 số nguyên dương liên tiếp và X là một tập con của S có 20 phần tử. Chứng minh tồn tại bốn phần tử phân biệt a, b, c và d của X thỏa mãn $a + b = c + d$.

Thời gian: 180 phút.

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2023-2024

Ngày thi thứ hai: 22/10/2023

Bài 5 (6,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x - y) + 1) + xy = f(x)(f(y) + 2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6 (7,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có đường cao AD . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC và I là một điểm thuộc đoạn thẳng AD (I khác A và I khác D). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên AB, AC . Hai đường thẳng BF và CE cắt nhau tại J , đường thẳng AJ cắt đường thẳng BC tại N .

- Chứng minh bốn điểm E, F, M và N cùng nằm trên một đường tròn.
- Đường tròn đường kính AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC tại điểm thứ hai P . Hai đường thẳng AP và BC cắt nhau tại Q . Chứng minh ba điểm I, J và Q cùng nằm trên một đường thẳng.

Bài 7 (7,0 điểm). Cho số nguyên $k > 7$ và một bảng ô vuông cỡ $(2k + 1) \times (2k + 1)$, trong đó mỗi ô vuông của bảng được tô màu đen hoặc màu trắng, sao cho hiệu giữa số ô vuông có màu đen và số ô vuông có màu trắng của bảng không vượt quá $k^2 + k$.

Chứng minh trong bảng đã cho tồn tại một bảng ô vuông cỡ $m \times m$, với $m \in \{k; k + 1\}$, sao cho hiệu giữa số ô vuông có màu đen và số ô vuông có màu trắng của bảng không vượt quá $\frac{m^2}{4}$.

Thời gian: 180 phút.