

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2022-2023

Ngày thi thứ nhất: 22/10/2022

Bài 1 (5 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{4}{9}$ và

$$u_{n+1} = 1 + u_n - u_n\sqrt{u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2 (5 điểm). Tìm tất cả các số nguyên x sao cho số $4x^3 + 9x^2 - 10x - 15$ là số chính phương.

Bài 3 (5 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Trên cung nhỏ AC lấy điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ không là hình thang. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOD và đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt nhau tại hai điểm phân biệt H và O . Gọi I là giao điểm của AC và BD .

- Chứng minh đường thẳng HI vuông góc với đường thẳng HO .
- Gọi M là trung điểm của CD và N là hình chiếu của I lên BC . Chứng minh bốn điểm M, H, N và C cùng thuộc một đường tròn.

Bài 4 (5 điểm). Cho tập hợp M gồm 10 màu khác nhau và hai đoạn thẳng AB, CD cùng có độ dài bằng 100. Chia AB thành 100 đoạn và tô mỗi màu trong M cho đúng 10 đoạn. Chia CD thành 10 đoạn và tô mỗi màu trong M cho đúng 1 đoạn. Chồng khớp AB lên CD sao cho A trùng C và B trùng D . Gọi S là tổng độ dài của các phần có chung màu trên AB và CD .

- Chứng minh rằng tồn tại một cách chia và tô màu cho AB , đồng thời tồn tại một cách chia CD mà với mọi cách tô màu cho CD thì $S = 10$.
- Chứng minh rằng với mọi cách chia và tô màu cho AB , đồng thời với mọi cách chia CD , luôn tồn tại cách tô màu cho CD để $S \geq 10$.

Thời gian: 180 phút.

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2022-2023

Ngày thi thứ hai: 23/10/2022

Bài 5 (6 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) - 2y) = 2x + f(f(y) - x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6 (7 điểm). Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, AC lần lượt tại D, E . Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{ABC}$ của tam giác ABC . Đường thẳng DJ cắt (I) tại hai điểm phân biệt D và X , đường thẳng JE cắt (I) tại hai điểm phân biệt E và Y .

- Chứng minh các đường thẳng YD, EX và JC cùng đi qua một điểm.
- Đường thẳng CX cắt AB tại M , gọi N là điểm đối xứng với M qua trung điểm của đoạn AB . Gọi P là giao điểm của đường thẳng CY và đường thẳng qua N song song với CX . Đường thẳng BP cắt AC tại K , đường thẳng AP cắt BC tại H . Chứng minh bốn điểm B, A, K và H cùng thuộc một đường tròn.

Bài 7 (7 điểm). Cho số nguyên dương n lớn hơn 3. Viết các số $1, 2, \dots, n^2$ vào các ô vuông của bảng ô vuông cỡ $n \times n$ sao cho hai ô vuông khác nhau được viết hai số khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại hai ô vuông nằm trên cùng một hàng hoặc nằm trên cùng một cột sao cho hiệu của hai số được viết trên hai ô vuông đó lớn hơn $\frac{n^2}{2}$.

Thời gian: 180 phút.