

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2021-2022

Ngày thi: 12 tháng 01 năm 2022

Bài 1 (4 điểm). Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = x_2 = 1$ và

$$x_{n+2} = x_{n+1}^2 - \frac{1}{3}x_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Bài 2 (4 điểm). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn

$$(x-3)P(x) - (x+3)P(x-2) = 8x-6, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 3 (4 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$) có ba đường cao AD , BE và CF đồng quy tại điểm H . Gọi M là hình chiếu vuông góc của điểm H trên đường thẳng EF . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp của tam giác DFM đi qua trung điểm của đoạn thẳng BF .

Bài 4 (4 điểm). Cho S là một tập hợp gồm 46 số tự nhiên liên tiếp.

- Chứng minh với mọi số nguyên dương k lớn hơn 2, không thể chia S thành k tập hợp khác rỗng sao cho tích các phần tử trong mỗi tập hợp bằng nhau.
- Chứng minh không thể chia S thành 2 tập hợp khác rỗng sao cho tích các phần tử trong mỗi tập hợp bằng nhau.

Bài 5 (4 điểm). Cho n là một số nguyên dương nhỏ hơn 2^{100} . Với mỗi tập hợp khác rỗng T gồm hữu hạn số thực, ký hiệu $s(T)$ là tổng tất cả các phần tử của T . Chứng minh tồn tại tập hợp X gồm 100 số thực sao cho X có đúng n tập hợp con khác rỗng $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ thỏa mãn $s(Y_i) > 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Thời gian: 180 phút.