

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2020-2021

Ngày thi thứ nhất: 19/10/2020

Bài 1 (5 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2^n u_n + 3}, \quad \forall n \geq 1.$$

Tìm giới hạn $\lim \sqrt[n]{u_n}$.

Bài 2 (5 điểm). Cho đa thức $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_9) - 3$, trong đó $a_1, a_2, \dots, a_9$ là các số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh $P(x)$ không phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Bài 3 (5 điểm). Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{BAC} < 90^\circ$) và M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng CM sao cho $\widehat{CBN} = \widehat{ACM}$.

- Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BCN tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN .
- Đoạn thẳng AC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại điểm thứ hai P . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh đường thẳng NP đi qua trung điểm của đoạn thẳng MI .

Bài 4 (5 điểm). Tìm số bộ số nguyên dương $(a_1, a_2, \dots, a_{15})$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

- $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{15} \leq 2020$.
- $a_i \equiv i^2 \pmod{5}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 15$.

Thời gian: 180 phút.

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2020-2021

Ngày thi thứ hai: 20/10/2020

Bài 5 (6 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(4xf(x) + f(y)) = 4(f(x))^2 + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6 (7 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC đồng quy tại điểm H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm S . Qua S kẻ các tiếp tuyến SX, SY tới đường tròn (O) , với X, Y là các tiếp điểm.

- Chứng minh D, X và Y là ba điểm thẳng hàng.
- Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng XY và EF . Chứng minh đường thẳng IH đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC .

Bài 7 (7 điểm). Cho p là một số nguyên tố lớn hơn 3.

- Chứng minh $\sum_{i=1}^{p-1} (C_p^i)^2 \equiv 0 \pmod{p^3}$.
- Cho n là một số nguyên dương thỏa mãn $n \equiv 1 \pmod{p}$. Chứng minh $C_{np}^p \equiv n \pmod{p^4}$.

Thời gian: 180 phút.