

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2019-2020

Ngày thi: 22 tháng 10 năm 2019

Bài 1 (4 điểm). Tìm tất cả các số tự nhiên m, n thỏa mãn $5^m = n \cdot 2^m + 1$.

Bài 2 (4 điểm). Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1, u_2 \in (0; 1)$ và

$$u_{n+2} = \frac{1}{n}u_{n+1}^2 + \frac{n-1}{n}\sqrt{u_n}$$

với mọi $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Tìm giới hạn của dãy (u_n) .

Bài 3 (4 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$x^2y^2(f(x+y) - f(x) - f(y)) = 3(x+y)f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 4 (5 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi (O_a) là đường tròn tiếp xúc với các cạnh AB, AC và tiếp xúc trong với (O) tại D .

a) Chứng minh DI đi qua điểm chính giữa cung lớn BC .

b) Gọi (O_b) là đường tròn tiếp xúc với các cạnh BC, BA và tiếp xúc trong với (O) tại E ; (O_c) là đường tròn tiếp xúc với các cạnh CB, CA và tiếp xúc trong với (O) tại F . Chứng minh ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

Bài 5 (3 điểm). Cho tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 2019\}$. Gọi S_n là số cách chọn ra n tập con của A thỏa mãn: mỗi tập con gồm n số tự nhiên liên tiếp, không tập con nào chứa số 1010 và hai tập con bất kì không có phần tử chung.

Chứng minh $n!S_n < 2019^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Thời gian: 180 phút.