

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2018-2019

Ngày thi: 28/9/2018

Bài 1 (4 điểm). Gọi $d_1, d_2, \dots, d_k$ là tất cả các ước nguyên dương của n được sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Tìm tất cả các số nguyên dương n có tính chất sau:

$$\begin{cases} d_5 - d_3 = 40 \\ 7d_5 + 8d_7 = 3n. \end{cases}$$

Bài 2 (4 điểm). Cho đa thức $P(x) = x^p + ax^2 + bx + c$ trong đó a, b, c là các số nguyên và p là số nguyên tố. Biết rằng $P(x)$ có ba nghiệm nguyên x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ không chia hết cho p . Chứng minh rằng $abc + ac$ chia hết cho p^3 .

Bài 3 (4 điểm). Với mỗi số nguyên dương n xét hàm số $f_n(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x + 1$.

- 1) Chứng minh rằng hàm $f_n(x)$ luôn đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm x_n duy nhất.
- 2) Tìm $\lim f_n(x_n)$.

Bài 4 (4 điểm). Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Qua A kẻ hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Δ_1 cắt hai đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D ; Δ_2 cắt hai đường tròn (O) và (O') lần lượt tại E và F (C, D, E, F khác A). Các đường trung trực của CD và EF cắt nhau tại K . Một đường thẳng thay đổi đi qua K cắt đường tròn (O') tại P, Q . Chứng minh rằng trực tâm tam giác APQ luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 5 (4 điểm). Xét các số hữu tỉ dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn

$$x_1 + \frac{1}{p_1}; x_2 + \frac{1}{p_2}; \dots; x_n + \frac{1}{p_n}$$

là các số nguyên dương (với $p_i = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{x_i}$, $\forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$).

- 1) Chứng minh $x_1 x_2 \dots x_n = 1$.
- 2) Có bao nhiêu bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn đầu bài?

Thời gian: 180 phút.