

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2017-2018

Ngày thi: 30 tháng 9 năm 2017

Bài 1 (4 điểm). Cho x, y và z là các số hữu tỷ sao cho các số $x^2 + y^2 + z$, $y^2 + z^2 + x$ và $z^2 + x^2 + y$ đều là các số nguyên. Chứng minh rằng $2x$ là số nguyên.

Bài 2 (4 điểm). Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\tan x) = \frac{1}{2} \sin 2x - \cos 2x, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(\sin^2 x) \cdot f(\cos^2 x)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Bài 3 (4 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB , N là điểm trên cạnh BC sao cho $BA = BN$. Đường tròn đường kính AB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC tại hai điểm phân biệt A và P . Gọi E là giao điểm của đường thẳng qua B vuông góc với MP và đường thẳng AP , F là giao điểm của đường thẳng qua B song song với MP và đường thẳng PN . Chứng minh đường thẳng CP đi qua trung điểm của EF .

Bài 4 (4 điểm). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực sao cho

$$(P(x))^2 = 2P(x^2 - 3) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 5 (4 điểm). Với $n \in \{1; 2; 3\}$, ta gọi một số tự nhiên k là số kiểu n nếu $k = 0$ hoặc k là một số hạng của dãy $1; n + 2; (n + 2)^2; (n + 2)^3; \dots$ hoặc k là tổng của một số số hạng của dãy trên. Chứng minh rằng bất kỳ số nguyên dương nào cũng biểu diễn được dưới dạng tổng của một số kiểu 1 với một số kiểu 2 và một số kiểu 3.

Thời gian: 180 phút.