

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2016-2017

Ngày thi: 30 tháng 9 năm 2016

Bài 1 (4,0 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - x - 3y - 2 = 0 \\ x^3 - x^2y + xy^2 + y^2 + x - y = 0 \end{cases}$$

với $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 2 (4,0 điểm). Tìm tất cả các bộ ba số nguyên $(x; y; z)$ thỏa mãn

$$12^x + y^4 = 56^z.$$

Bài 3 (4,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 - f^2(y)) = xf(x) + y^2$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 4 (4,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) với trung tuyến AM . Đường thẳng AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai D . Đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại E , đường thẳng AC cắt đường thẳng BD tại F . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE tại hai điểm A và P . Gọi (S_1) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với AB tại A , (S_2) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại A . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và Q là giao điểm thứ hai của (S_1) và (S_2) . Chứng minh tam giác OPQ là tam giác vuông.

Bài 5 (4,0 điểm). Xét các cách viết các số $1^2, 2^2, \dots, 8^2$ trên 8 đỉnh của một hình lập phương, mỗi đỉnh viết một số và hai đỉnh khác nhau viết hai số khác nhau. Trong một cách viết, với mỗi cạnh của hình lập phương ta lập một số là tích hai số ở 2 đầu mút của cạnh đó, gọi S là tổng của 12 số như vậy. Tìm giá trị lớn nhất của S .

Thời gian làm bài: 180 phút.