

Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội năm học 2015-2016

Ngày thi: 22 tháng 10 năm 2015

Bài 1 (4,0 điểm). Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho

$$\frac{x^2y + xy^2 + 8x}{xy^2 + 4y}$$

là số nguyên.

Bài 2 (4,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 0, u_2 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh $u_{2017}(u_{2017} + 1)$ chia hết cho 2017.

Bài 3 (3,0 điểm). Với $a, b, c \in [0; 2]$ thỏa mãn $a + b + c = 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{ab + a} + \sqrt{bc + b} + \sqrt{ca + c}.$$

Bài 4 (5,0 điểm). Cho (ω) là đường tròn có tâm O và đường kính AB . Gọi C là một điểm trên (ω) sao cho $90^\circ < \widehat{AOC} < 180^\circ$. Trên đoạn thẳng OC lấy điểm K (K khác O và C). Gọi (ω_1) là đường tròn tâm K bán kính KC . AD, AE là các tiếp tuyến của (ω_1) với D, E là các tiếp điểm. Chứng minh ba đường thẳng AC, BK và DE cùng đi qua một điểm.

Bài 5 (4,0 điểm). Cho k là số nguyên dương. Tìm số nguyên dương m nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện: Tồn tại $2k + 1$ số nguyên dương phân biệt có tổng lớn hơn m và tổng của k số bất kì trong $2k + 1$ số đó không vượt quá $\frac{m}{2}$.

Thời gian làm bài: 180 phút.