SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ**
HÀ NỘI	**DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA CẤP THPT**
	NĂM HỌC 2024-2025
ĐỀ CHÍNH THỨC	Môn thi: **TOÁN**
	Ngày thi thứ nhất: 11/10/2024
	Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1 (*5,0 điểm*)

Cho dãy số $(u_n)_{n\geq 1}$ xác định bởi $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+\sqrt{4u_n^2+3}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh dãy số $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\geq 2}$ có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Bài 2 (*5,0 điểm*)

Tìm tất cả cặp số nguyên tố (p,q) sao cho tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn $n^{|p-q|}+1$ chia hết cho pq.

Bài 3 (*6,0 điểm*)

Cho tam giác nhọn $ABC\,(AB<AC)$ có đường cao AD. Gọi E là một điểm trên cạnh AB (E khác A và B). Đường thẳng CE cắt đường thẳng AD tại điểm M. Gọi X là một điểm thay đổi trên tia đối của tia ED và Y là điểm đối xứng với X qua đường thẳng AD.

a) Chứng minh ba đường thẳng AC, BM và DY cùng đi qua một điểm.

b) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDX và đường tròn ngoại tiếp tam giác CDY. Chứng minh P nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 4 (*4,0 điểm*)

Cho tập hợp $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Gọi S là tập hợp tất cả số tự nhiên có 100 chữ số được thành lập từ các chữ số thuộc tập hợp A, sao cho trong mỗi số thuộc S hai chữ số kề nhau bất kì là hai số tự nhiên liên tiếp. Tìm số dư khi chia số phần tử của S cho 4.

--------- **Hết** ---------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ, tên thí sinh: ……Số báo danh: ……..…….

Họ, tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1: Họ, tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2:

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ**
HÀ NỘI	**DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA CẤP THPT**
	NĂM HỌC 2024-2025
ĐỀ CHÍNH THỨC	Môn thi: **TOÁN**
	Ngày thi thứ hai: 12/10/2024
	Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 5 (*6,0 điểm*)

Xét hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^4-y-4f\left(y\right)\right)=\left(f\left(x\right)\right)^4-5y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

a) Chứng minh $\forall x\in\mathbb{R},\ f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=0.$

b) Chứng minh $f\left(x\right)=x$ với mọi số thực x.

Bài 6 (*7,0 điểm*)

Cho $A\left(x\right)$ là một đa thức với hệ số thực. Chứng minh tồn tại hai đa thức $B\left(x\right)$ và $C\left(x\right)$ với hệ số thực sao cho $B\left(C\left(x\right)\right)+C\left(B\left(x\right)\right)=A\left(x\right).$

Bài 7 (*7,0 điểm*)

Cho số nguyên $n>5$ và tập hợp $S=\left\{2n^2-n+1,2n^2-n+2,...,2n^2+2n\right\}$ gồm $3n$ số nguyên liên tiếp.

Chứng minh với hai số nguyên phân biệt a và b bất kì thuộc khoảng $\left(n;2n\right)$, tồn tại số nguyên dương k và các phần tử $c_1,c_2,...,c_k$ (không nhất thiết phân biệt) của S sao cho số $\dfrac{c_1c_2...c_k}{ab}$ là bình phương của một số nguyên.

--------- **Hết** ---------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ, tên thí sinh: …….Số báo danh: ……...……

Họ, tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1: Họ, tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2: