# IMO 2022

## Ngày thi thứ nhất

1. https://artofproblemsolving.com/community/c6h2883211

   Ngân hàng Oslo phát hành hai loại tiền xu: nhôm (ký hiệu A) và đồng (ký hiệu B). Marianne có $n$ đồng xu nhôm và $n$ đồng xu đồng, được sắp xếp thành một hàng theo một thứ tự tùy ý. *Chuỗi* là một dãy con bất kỳ các đồng xu liên tiếp cùng loại. Với một số nguyên dương $1 < k < 2n$, Marianne liên tục thực hiện thao tác sau: cô ấy xác định chuỗi dài nhất chứa đồng xu thứ $k$ từ bên trái và di chuyển tất cả các đồng xu trong chuỗi đó sang cuối hàng bên trái.

   Ví dụ: nếu $n = 4$ và $k = 4$, quá trình bắt đầu từ hàng $AABBBABA$ sẽ là $AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots$

   Tìm tất cả các cặp $(n, k)$ sao cho với mỗi cách xếp ban đầu, tại một thời điểm nào đó trong quá trình này, $n$ đồng xu ngoài cùng bên trái có cùng loại.

2. https://artofproblemsolving.com/community/c6h2883212

   Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ sao cho với mỗi $x > 0$, có đúng một $y > 0$ để $xf(y) + yf(x) \leq 2$.

3. https://artofproblemsolving.com/community/c6h2883213

   Cho một số nguyên dương $k$ và một tập hợp hữu hạn $S$ các số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng có nhiều nhất một cách (sai khác một phép quay hay một phép đối xứng) xếp các phần tử của $S$ quanh một đường tròn sao cho tích của mỗi hai số cạnh nhau có dạng $x^2 + x + k$ với một số nguyên dương $x$ nào đó.

# IMO 2022

## Ngày thi thứ hai

4. https://artofproblemsolving.com/community/c6h2883216

   Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ với $BC = DE$. Giả sử có một điểm $T$ nằm trong $ABCDE$ sao cho $TB = TD$, $TC = TE$, và $\angle ABT = \angle TEA$. Đường thẳng $AB$ cắt các đường thẳng $CD$ và $CT$ lần lượt tại $P$ và $Q$. Giả sử $P$, $B$, $A$, và $Q$ thẳng hàng theo thứ tự đó. Đường thẳng $AE$ cắt các đường thẳng $CD$ và $DT$ lần lượt tại $R$ và $S$. Giả sử $R$, $E$, $A$, và $S$ thẳng hàng theo thứ tự đó. Chứng minh rằng các điểm $P$, $S$, $Q$, và $R$ cùng nằm trên một đường tròn.

5. https://artofproblemsolving.com/community/c6h2883217

   Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(a, b, p)$ sao cho $p$ là số nguyên tố và

   $$a^p = b! + p.$$

6. https://artofproblemsolving.com/community/c6h2883218

   Cho $n$ là một số nguyên dương. Hình vuông *Nordic* là một bảng $n \times n$ chứa tất cả các số nguyên từ 1 đến $n^2$ sao cho mỗi ô chứa đúng một số. Hai ô khác nhau được coi là liền kề nếu chúng có chung một cạnh. Mỗi ô chỉ liền kề với các ô chứa số lớn hơn được gọi là *thung lũng*. Một *đường lên dốc* là một dãy gồm một hoặc nhiều ô sao cho:

   (a) ô đầu tiên trong dãy là một thung lũng,

   (b) mỗi ô tiếp theo trong dãy liền kề với ô trước đó, và

   (c) các số được viết trong các ô trong dãy theo thứ tự tăng dần.

   Tìm, dưới dạng một hàm của $n$, số đường lên dốc nhỏ nhất có thể có trong một hình vuông Nordic.